Topologie

Mildenberger
Sommersemester 26

Fassung vom 21.07.2026, compiled 21. Juli 2026

Inhaltsverzeichnis

I Mengentheoretische Topologie **7**

1 Topologische Räume und stetige Abbildungen **9**
1.1 Topologische Räume 9
1.2 Stetige Abbildungen 15

2 Die Erzeugung topologischer Räume **17**
2.1 Die Spurtopologie 17
2.2 Die Produkttopologie 19
2.3 Die Initialtopologie 21
2.4 Die Finaltopologie 22
2.5 Der Summenraum 25
2.6 Das Anheften oder Zusammenkleben von Räumen 25

3 Zusammenhängende und wegzusammenhängende Räume **27**

4 Filter und Konvergenz **35**

5 Trennungseigenschaften **41**

6 Normale und T4-Räume **53**

7 Kompaktheit **59**

8 Satz von Stone-Weierstraß **65**

9 Uniforme Räume **71**

II Algebraische Topologie 73

10 Quotienten und Gruppenoperationen 75
10.1 Quotienten nach Gruppenoperationen 78

11 Homotopie 85
11.1 Die Fundamentalgruppe 88
11.2 Die Fundamentalgruppe als Funktor 92
11.2.1 Die Rolle des Basispunktes 94
11.3 Lokale Produkte und Überlagerungen 99
11.4 Retraktionen 107
11.5 Das freie Produkt 109

12 Dank 115

Literaturverzeichnis 117

Index 118

Vorwort

Quellen sind die Topologiebücher von Boto von Querenburg [6], Engelking [1], Kuratowski [4], Munkres [5].

Teil I

Mengentheoretische Topologie

Kapitel 1

Topologische Räume und stetige Abbildungen

1.1 Topologische Räume

Definition 1.1. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Metrik auf* X, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. $(\forall x, y \in X)\ (d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y)$.
2. $(\forall x, y \in X)\ d(x,y) = d(y,x)$.
3. $(\forall x, y, z \in X)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Eigenschaft 3 nennt man auch *Dreiecksungleichung*.

Definition 1.2. Ein Paar (X, d) heißt *metrischer Raum*, wenn $X \neq \emptyset$ eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik auf X ist.

Beispiele 1.3.

1. $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x - y|$.
2. $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.
3. $X = \mathbb{R}^n$ mit $d(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \bar{x} = \bar{y}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition 1.4. Eine Teilmenge $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Topologie auf* X, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\emptyset \in \mathscr{O}$ und $X \in \mathscr{O}$.
2. $\mathscr{O}$ ist gegen endliche Schnitte abgeschlossen, d.h.
$$\forall \mathscr{B} \subseteq \mathscr{O} \left(|\mathscr{B}| \in \mathbb{N} \to \bigcap \mathscr{B} = \bigcap_{O \in \mathscr{B}} O \in \mathscr{O} \right).$$
3. $\mathscr{O}$ ist gegen beliebige Vereinigungen abgeschlossen, d.h.
$$\forall \mathscr{B} \subseteq \mathscr{O} \bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B \in \mathscr{O}.$$

Bemerkung 1.5. Wir verwenden die folgende Konvention:
$$\bigcup_{i \in \emptyset} O_i = \emptyset, \quad \bigcap_{i \in \emptyset} O_i = X.$$

Definition 1.6. Ein Paar $(X, \mathscr{O})$ heißt *topologischer Raum*, wenn X eine nicht leere Menge und $\mathscr{O} \subseteq \mathscr{P}(X)$ eine Topologie auf X ist.

Definition 1.7. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Menge O heißt *offen*, wenn $O \in \mathscr{O}$.
Eine Menge A heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A \in \mathscr{O}$. Das System aller abgeschlossenen Mengen wird mit $\mathscr{A}$ bezeichnet.

Definition 1.8. Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(X, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume. Falls $\mathscr{O}_1 \subseteq \mathscr{O}_2$, so sagen wir „$\mathscr{O}_2$ ist feiner als $\mathscr{O}_1$“ und „$\mathscr{O}_1$ ist gröber als $\mathscr{O}_2$“.

Beispiele: Denken Sie an $X = \mathbb{R}$. Welche Topologien auf $\mathbb{R}$ kennen Sie? Erinnern Sie sich an die Definition einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ aus der Analysis?

Definition 1.9. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.

(1) Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ heißt *Basis von* $\mathscr{O}$, wenn
$$\mathscr{O} = \left\{ Y \in \mathscr{P}(X) \mid \exists B \subseteq \mathscr{B} \left(Y = \bigcup B \right) \right\}.$$

(2) Eine Teilmenge $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Subbasis von* $\mathscr{O}$, wenn

$$\mathscr{B} := \left\{ Y \in \mathscr{P}(X) \mid \exists \mathscr{A} \subseteq \mathscr{S} \left(|\mathscr{A}| \in \mathbb{N} \wedge \bigcap \mathscr{A} = Y \right) \right\} \cup \{\emptyset\}$$

eine Basis von $\mathscr{O}$ ist. Eine äquivalente Definition von Subbasis ist: $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ist eine Subbasis von $\mathscr{O}$, wenn $\mathscr{O}$ genau die Mengen enthält, die als Vereinigung endlicher Schnitte aus $\mathscr{S}$ geschrieben werden können. Hierbei sind der leere Schnitt als X zu interpretieren und die leere Vereinigung als $\emptyset$ zu interpretieren.

Lemma 1.10. *Jede Teilmenge $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ist Subbasis einer Topologie.*

Lemma 1.11. *Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ist Basis einer Topologie, wenn*

$$\forall A \subseteq \mathscr{B} \left(|A| \in \mathbb{N} \to \exists B \subseteq \mathscr{B}, \bigcup B = \bigcap A \right).$$

Eine andere Charakterisierung ist: $\mathscr{B}$ ist Basis , wenn

$$\forall A \subseteq \mathscr{B} \left(|A| \in \mathbb{N} \to \forall x \in \bigcap A, \exists B \in \mathscr{B}, x \in B \subseteq \bigcap A \right).$$

Beweis: Es sei $\mathscr{O}$ definiert durch

$$\mathscr{O} := \{O \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in O \exists B \in \mathscr{B}\ x \in B \subseteq O\}$$

Wir zeigen, dass $\mathscr{O}$ eine Topologie und $\mathscr{B}$ eine Basis von $\mathscr{O}$ ist.
Wenn wir in der obigen Definition $A = \emptyset$ nehmen, folgt nach unsere Konvention, dass es $B \subseteq \mathscr{B}$ gibt, sodass $\bigcup B = \bigcap A = \bigcap \emptyset = X$. Insbesondere gibt es für jedes $x \in X$ ein $B \in \mathscr{B}$, sodass $x \in B$. $B \subseteq X$ ist klar. Also gilt $X \in \mathscr{O}$. $\emptyset \in \mathscr{O}$ gilt, da jede Aussage $\forall x \in \emptyset$, $\varphi(x)$ wahr ist, egal, was φ ist.
Es sei $A \subseteq \mathscr{O}$ endlich und $x \in \bigcap A$. Dann folgt aus der Voraussetzung direkt, dass ein B existiert wie gefordert. Also ist, da x beliebig war, $\bigcap A \in \mathscr{O}$.
Es sei $A \subseteq \mathscr{O}$ beliebig und o.B.d.A. nicht leer. Es sei $x \in \bigcup A$ und $Y \in A$, sodass $x \in Y$. Es sei $B \in \mathscr{B}$, sodass $x \in B \subseteq Y$ (da $Y \in \mathscr{O}$). Dann ist $x \in B \subseteq Y \subseteq \bigcup A$. Also ist, da x beliebig war, $\bigcup A \in \mathscr{O}$.
$\mathscr{O}$ ist demnach eine Topologie.
Es sei $Y \in \mathscr{O}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert damit für jedes $x \in Y$ ein $B_x \in \mathscr{B}$, sodass $x \in B_x \subseteq Y$. Also ist $Y = \bigcup_{x \in Y} B_x$ und

$$\mathscr{O} \subseteq \left\{ Y \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \subseteq \mathscr{B} \left(Y = \bigcup B \right) \right\}.$$

Die andere Inklusion folgt daraus, dass $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ und $\mathscr{O}$ unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. □

Lemma 1.12 (und Definition)**.** *Jeder metrische Raum (X, d) trägt eine Topologie, die von den offenen ε-Umgebungen erzeugt wird. Hierbei bezeichnet $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ die offene ε-Umgebung von x. Eine Basis der metrischen Topologie ist*

$$\mathscr{B} := \{B_\varepsilon(x) \mid x \in X,\, \varepsilon > 0\}.$$

Es ist also $\mathscr{O}_d$ durch beliebige Vereinigungen erzeugt:

$$\mathscr{O}_d := \left\{Y \subseteq X \mid \exists B \subseteq \mathscr{B}\ \left(Y = \bigcup B\right)\right\}.$$

Die Topologie $\mathscr{O}_d$ heißt die von der Metrik d erzeugte Topologie auf X.

Beweis: Wir überprüfen, dass $\mathscr{O}_d = \mathscr{O}$ eine Topologie auf X definiert:

1. Es gilt $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathscr{O}$ und $X = \bigcup_{x \in X} B_1(x) \in \mathscr{O}$.

2. Zunächst stellen wir fest, dass allgemein $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} A_i \cap B_j$ gilt. Also genügt es zu zeigen, dass es für $x_1, x_2 \in X$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Menge $B \subseteq \mathscr{B}$ gibt, so dass $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) = \bigcup B$.
   1. Fall: $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) = \emptyset = \bigcup \emptyset$.
   2. Fall: Falls $z \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) =: A$, so wähle

   $$\varepsilon(z) := \min\{\varepsilon_1 - d(z, x_1), \varepsilon_2 - d(z, x_2)\} > 0.$$

   Dann gilt $B_{\varepsilon(z)}(z) \subseteq A$ (man verwendet die Dreiecksungleichung). Es folgt

   $$A = \bigcup_{z \in A} B_{\varepsilon(z)}(z).$$

3. Klar, da Vereinigungen von Vereinigungen wieder Vereinigungen sind.

□

Frage 1.13. Gibt es einen topologischen Raum $(X, \mathscr{O})$, so dass $\mathscr{O}$ nicht von einer Metrik erzeugt wird? Hier findet man leicht Gegenbeispiele. Schwerer ist die folgende Frage: Gibt es einen Hausdorff Raum $(X, \mathscr{O})$ mit abzählbaren Umgebungsbasen, so dass $\mathscr{O}$ nicht von einer Metrik erzeugt wird? Wenn Sie interessiert sind, schlagen Sie unter Bing, Nagata, Smirnov nach.

Beispiele 1.14 (Topologische Räume).

1. Die *indiskrete Topologie* auf X: $\mathscr{O} = \{\emptyset, X\}$ ist die gröbste Topologie auf X. Sie ist nicht metrisierbar, falls X mindestens zwei Elemente enthält, aber pseudometrisierbar.
   (Eine *Pseudometrik* ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Metrikeigenschaften 2 und 3 erfüllt, aber anstelle von Eigenschaft 1 nur $\forall x \in X\ d(x,x) = 0$.)

2. Die *diskrete Topologie* auf X: $\mathscr{O} = \mathscr{P}(X)$, oder äquivalent $\forall x\ (\{x\} \in \mathscr{O})$, ist die feinste Topologie auf X. Sie ist metrisierbar durch
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

3. Falls $(X, <)$ eine lineare Ordnung ist (d.h. $<$ ist transitiv, irreflexiv und konnex), so ist
$$\mathscr{B} := \{(a,b) \mid a, b \in X\} \cup \{[\min(X), a), (a, \max(X)] : a \in X\}$$
eine Basis der *Ordnungstopologie* auf X, wobei
$$(a,b) := \{x \in X \mid a < x < b\}.$$
$$[a,b) := \{x \in X \mid a \leq x < b\}.$$
Falls es kein Minimum oder kein Maximum gibt, lässt man die entsprechenden halboffenen Intervalle weg.

4. Die *kofinite Topologie* auf X: $\mathscr{O}_{\text{kofinit}} := \{X \setminus A \mid A \subseteq X,\ A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$.

5. Die *Standardtopologie* auf $\mathbb{R}$: Dies ist die Ordnungstopologie von $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ und auch die von der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^n$ wird die Standardtopologie durch die zweite (und auch weitere andere Metriken) Metrik in Beispiel 1.3 gegeben.

6. Die *Sorgenfrey-Gerade*: $X = \mathbb{R}$, eine Subbasis ist durch die halboffenen Intervalle $\{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Wir behaupten, dass die Topologie der Sorgenfrey-Gerade echt feiner ist als die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$:
   Es gilt $(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$, also ist eine Basis der Standardtopologie in der Topologie der Sorgenfrey-Gerade enthalten. Damit gilt das auch für die gesamte Standardtopologie.

Definition 1.15. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung von* x, wenn $\exists O\,(O \subseteq U \wedge x \in O \wedge O \in \mathscr{O})$.
Die Menge $\mathscr{U}(x) := \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$ heißt *Umgebungssystem von* x.

Definition 1.16. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Umgebungsbasis von* x, wenn $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}(x)$ und $\forall A \in \mathscr{U}(x)\, \exists B \in \mathscr{B}\ (B \subseteq A)$.

Wir erinnern an die Definition der Abzählbarkeit vom ersten Aufgabenblatt. Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Funktion $f\colon A \to \mathbb{N}$ gibt.

Definition 1.17. Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.
Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn $\mathscr{O}$ eine abzählbare Basis hat.

Beispiel 1.18. Der topologische Raum $(X, \mathscr{O}_{<_{\mathbb{R}}})$ besitzt $\{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{Q}\}$ als Basis, erfüllt also das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Definition 1.19. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.

(1) Das *offene Innere von* $A \subseteq X$ ist

$$\mathring{A} := \bigcup \{O \in \mathscr{O} \mid O \subseteq A\}\,.$$

(2) Der *Abschluss von* $A \subseteq X$ ist

$$\bar{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \mathscr{U}(x)\, U \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

(3) Der *Rand von* A ist

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}.$$

(4) Es sei $Y \subseteq X$. Eine Menge $A \subseteq Y$ heißt *dicht in* Y, wenn $\bar{A} \supseteq Y$ gilt.

(5) Eine Menge A heißt *nirgends dicht*, wenn $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$ gilt.

Beispiel 1.20 (Das Cantor'sche Diskontinuum). Für $X \subseteq \mathbb{R}$ sei $2 + X = \{2 + x : x \in X\}$ und $\frac{1}{3}X = \{\frac{x}{3} : x \in X\}$. Es sei $A_0 = [0, 1]$ in den reellen Zahlen, und für $n \geq 0$ sei

$$A_{n+1} := \frac{1}{3}(A_n \cup (2 + A_n)),$$

$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_n$. Jedes A_n is abgeschlossen. Dann ist C abgeschlossen, also $\bar{C} = C$, aber $\mathring{C} = \emptyset$. Also ist C nirgends dicht. Interessanterweise ist C aber trotzdem nicht abzählbar, sondern sogar gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

1.2 Stetige Abbildungen

Definition 1.21. Es seien X, Y Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für $A \subseteq X$ sei $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$. Für $B \subseteq Y$ sei $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Es sei wiederum $A \subseteq X$. Die *Einschränkung von f auf A* ist die Funktion $f \restriction A\colon A \to Y$, definiert durch $(f \restriction A)(x) = f(x)$ für $x \in A$. In Mengenschreibweise: $f \restriction A := f \cap (A \times Y)$.

Definition 1.22. Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(Y, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn

$$\forall O \in \mathscr{O}_2,\ f^{-1}[O] \in \mathscr{O}_1.$$

Es sei $x \in X$. Dann heißt f *stetig in x*, wenn

$$\forall V \in \mathscr{U}_{\mathscr{O}_2}(f(x)), f^{-1}[V] \in \mathscr{U}_{\mathscr{O}_1}(x).$$

Bemerkung 1.23.

1. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist für alle $B, C \subseteq Y$, $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$ und $f^{-1}[B \cap C] = f^{-1}[B] \cap f^{-1}[C]$ und analog auch für Vereinigung.

2. Um zu zeigen, dass f stetig ist, genügt es nach den Rechenregeln für f^{-1}, zu zeigen, dass $f^{-1}[\mathscr{S}_2] \subseteq \mathscr{O}_1$ gilt für eine Subbasis $\mathscr{S}_2$ von $\mathscr{O}_2$.

3. Eine Funktion f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y abgeschlossen in X ist.

Definition 1.24. Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(Y, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, wenn

$$\forall O \in \mathscr{O}_1,\ f[O] \in \mathscr{O}_2.$$

Die Abbildung f heißt *abgeschlossen*, wenn

$$\forall A \text{ abgeschlossen in } \mathscr{O}_1,\ f[A] \text{ abgeschlossen in } \mathscr{O}_2.$$

Definition 1.25. Es seien $(X, \mathscr{O}_1)$ und $(Y, \mathscr{O}_2)$ topologische Räume.
Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und f sowie f^{-1} stetig sind.

Kapitel 2

Die Erzeugung topologischer Räume

2.1 Die Spurtopologie

Definition 2.1. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.
Dann heißt $\mathscr{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathscr{O}\}$ die *Unterraumtopologie* (oder *Spurtopologie*) *von* $(X, \mathscr{O})$ *auf* A.

Lemma 2.2. *Die Unterraumtopologie* $\mathscr{O}_A$ *ist tatsächlich eine Topologie auf* A.

Beweis:

1. $A = A \cap X \in \mathscr{O}_A$ und $\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathscr{O}_A$.
2. Es seien $U_1, U_2 \in \mathscr{O}$. Dann ist $(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathscr{O}_A$.
3. Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien $U_i \in \mathscr{O}$ für alle $i \in I$.
   Dann ist $\bigcup \{A \cap U_i \mid i \in I\} = A \cap \bigcup \{U_i \mid i \in I\} \in \mathscr{O}_A$.

□

Definition 2.3. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *diskret in* $(X, \mathscr{O})$, wenn $(A, \mathscr{O}_A)$ die diskrete Topologie auf A ist.

Lemma 2.4. *Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *ist diskret in* $(X, \mathscr{O})$ *genau dann, wenn*

$$\forall a \in A \, \exists O \in \mathscr{U}(a) \; ((A \setminus \{a\}) \cap O = \emptyset) .$$

Definition 2.5. Eine Abbildung $f\colon (X,\mathscr{O}) \to (X',\mathscr{O}')$ heißt *Einbettung*, wenn

$$f\colon (X,\mathscr{O}) \to \left(f[X],\mathscr{O}'_{f[X]}\right)$$

ein Homöomorphismus ist.

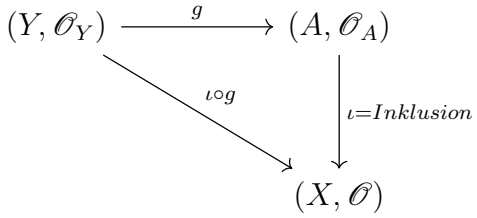
Eine Einbettung $f\colon (X,\mathscr{O}) \to (X',\mathscr{O}')$ ist offen, wenn das Bild $f[X] \in \mathscr{O}'$ ist. Eine Einbettung $f\colon (X,\mathscr{O}) \to (X',\mathscr{O}')$ mit $f[X] = X'$ ist ein Homöomorphismus.

Satz 2.6. *Es sei $(X,\mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $\iota\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung.*

1. *$\forall\,(Y,\mathscr{O}_Y)\ \forall g\colon (Y,\mathscr{O}_Y) \to (A,\mathscr{O}_A)$ gilt: g ist stetig genau dann, wenn*

   $$\iota \circ g\colon (Y,\mathscr{O}_Y) \to (X,\mathscr{O})$$

   stetig ist.

2. *Die Inklusion $\iota\colon (A,\mathscr{O}_A) \to (X,\mathscr{O})$ ist stetig und eine Einbettung (i.A. aber nicht offen) und $\mathscr{O}_A$ ist die gröbste Topologie auf A, für die ι stetig ist.*

Beweis:

1. Für $B \subseteq X$ ist

   $$(\iota \circ g)^{-1}[B] = \left(g^{-1} \circ \iota^{-1}\right)[B] = g^{-1}[B \cap A].$$

   Wenn g stetig ist und $B \in \mathscr{O}_Y$ ist, so ist $g^{-1}[B \cap A] \in \mathscr{O}_Y$ und damit auch $(\iota \circ g)^{-1}[B] \in \mathscr{O}_Y$, also ist $(\iota \circ g)$ stetig.
   Falls $(\iota \circ g)$ stetig ist, so ist $g^{-1}[B \cap A] \in \mathscr{O}_A$ für alle $B \cap A$ mit $B \in \mathscr{O}$, und damit ist g stetig.

2. Für jedes $B \in \mathscr{O}$ gilt $\iota^{-1}[B] = [B \cap A] \in \mathscr{O}_A$. Weiterhin sei $\mathscr{O}'$ eine weitere Topologie auf A, sodass ι stetig ist, so gilt

   $$\forall B \in \mathscr{O}\ B \cap A = \iota^{-1}[B] \in \mathscr{O}'$$

   und da jedes $C \in \mathscr{O}_A$ die Gestalt $B \cap A$ für $B \in \mathscr{O}$ hat, gilt $\mathscr{O}_A \subseteq \mathscr{O}'$.

□

Beispiel 2.7. Auf der Urbildseite hat der Übergang zur Spurtopologie großen Einfluss: Wir betrachten die Funktion

$$f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<) \to (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<)$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Die eingeschränkte Funktion $f \restriction \mathbb{Q}\colon \left(\mathbb{Q}, (\mathscr{O}_<)_{\mathbb{Q}}\right) \to (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<)$ ist stetig, da sie konstant ist, aber $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<) \to (\mathbb{R}, \mathscr{O}_<)$ ist nicht stetig.

Satz 2.8. *Es seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \mathscr{O}')$ topologische Räume und seien $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen, so dass $\bigcup_{i \le n} A_i = X$. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so dass $f \restriction A_i\colon (A_i, \mathscr{O}_{A_i}) \to (Y, \mathscr{O}')$ stetig ist für jedes i.*
Dann ist f stetig.

Beweis: Nach Bemerkung 1.23 ist f stetig genau dann, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Wir arbeiten nun mit diesem Kriterium. Es sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Für jedes i ist$(f \restriction A_i)^{-1}[B]$ abgeschlossen in der Spurtopologie, da B abgeschlossen ist und $f \restriction A_i$ bzgl. der Spurtopologie stetig ist. Es gibt daher ein abgeschlossenes C_i, so dass $C_i \cap A_i = (f \restriction A_i)^{-1}[B]$. Dann gilt

$$f^{-1}[B] = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f^{-1}[B] \cap A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(f \restriction A_i\right)^{-1}[B] = \bigcup_{i=1}^{n} \left(C_i \cap A_i\right).$$

Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. □

2.2 Die Produkttopologie

Nun definieren wir kartesische Produkte mit beliebig vielen (mengenvielen) Faktoren.

Definition 2.9 (mit Auswahlaxiom)**.** Es sei I eine beliebige Indexmenge und sei für $i \in I$ X_i eine nicht leere Menge. Dann ist

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f\colon I \to \bigcup \{X_i : i \in I\} \mid \forall i \in I, f(i) \in X_i\}$$

die Produktmenge. Man schreibt statt f auch $\langle x_i : i \in I \rangle$, wenn $f(i) = x_i$.

Definition 2.10. Wie oben sei I eine Indexmenge und für $i \in I$ sein X_i eine Menge. Es sei $i \in I$. Die Funktion $p_i \colon \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ mit $p_i(\langle x_j : j \in I\rangle) = x_i$ heißt die Projektion auf X_i.

Auf der Menge $\prod_{i\in I} X_i$ möchte man nun aus den einzelnen Topologien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ eine in geeignetem Maßen feine Topologie definieren. Es gibt mehrere recht natürliche Kandidaten.

Definition 2.11. Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für alle $i \in I$. Dann ist

$$\mathscr{B} := \{\prod_{i\in I} U_i \mid (\forall i \in I)\, U_i \in \mathscr{O}_i, \text{ und es gibt nur endlich viele } i, \text{ sodass } U_i \neq X_i\}$$

Basis einer Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, der sogenannten *Produkttopologie*.

Lemma 2.12. *$\mathscr{B}$ ist tatsächlich eine Basis.*

Beweis: $\left(\prod_{i\in I} U_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \prod_{i\in I} (U_i \cap V_i)$ und $U_i \cap V_i \neq X_i$ für nur endlich viele i. Eine endliche Menge ergibt sich als Vereinigung der Menge der $i \in I$, in denen $U_i \neq X_i$, mit der Menge der $j \in I$, in denen $V_j \neq X_j$. □

Bemerkung 2.13. Eine Subbasis der Produkttopologie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &:= \left\{\prod_{i\in I} U_i \mid \text{ es gibt genau ein } i \in I, \text{ sodass } U_i \neq X_i\right\} \\ &= \left\{p_i^{-1}[U_i] \mid U_i \in \mathscr{O}_i\right\}.\end{aligned}$$

Die Produkttopologie, aufgefasst als Initialtopologie

Satz 2.14. *Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, sodass alle Projektionen p_i stetig sind. Alle Projektionen sind offene Abbildungen.*

Beweis: Alle p_i sind stetig, da $p_i^{-1}[U_i] = \prod_{j\in I} U_j$, wobei $U_j = X_j$ für $j \neq i$. Falls $\mathscr{O}$ eine andere Topologie auf dem Produkt ist, bezüglich der alle p_i stetig sind, so enthält $\mathscr{O}$ die Subbasis der Produkttopologie, also auch die gesamte Produkttopologie. Für die Offenheit: Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq \prod_i X_i$ sei $U = \bigcup_{j\in J} \prod_i U_i^j$. Dann ist $p_i[U] = \bigcup_{j\in J} U_i^j$, was demnach offen ist. □

Satz 2.15. *$g\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to \prod_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i)$ ist genau dann stetig, wenn $p_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

Beweis: Nach Bemerkung 1.23 genügt es, die Urbilder einer Subbasis zu betrachten. Es sei nun also $U_i \subseteq X_i$ eine offene Menge in X_i. Dann gilt

$$g^{-1}[{p_i}^{-1}[U_i]] = (p_i \circ g)^{-1}[U_i],$$

und die Behauptung folgt. □

Definition 2.16. Es sei I eine Indexmenge und seien $f_i\colon (X_i, \mathscr{O}_i) \to (Y_i, \mathscr{O}'_i)$ Abbildungen für alle $i \in I$. Wir definieren die *Produktabbildung f der f_i* durch

$$f\colon \prod_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i) \to \prod_{i\in I} (Y_i, \mathscr{O}'_i),$$

$$f(\langle x_i \mid i \in I\rangle) := \langle f_i(x_i) \mid i \in I\rangle.$$

Satz 2.17. *Es seien für $i \in I$, $X_i \neq \emptyset$, $Y_i \neq \emptyset$. Die Produktabbildung*

$$f\colon \prod_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i) \to \prod_{i\in I} (Y_i, \mathscr{O}'_i)$$

ist genau dann stetig, wenn $f_i\colon (X_i, \mathscr{O}_i) \to (Y_i, \mathscr{O}'_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist.

Beweis: Es bezeichnen p_i und q_i die i-te Projektionsabbildung für $\prod_{j\in I} X_j$ bzw. $\prod_{j\in I} Y_j$.
Es seien alle f_i stetig. Es gilt $q_i \circ f = f_i \circ p_i$. Weil alle p_i stetig sind, ist $f_i \circ p_i$ und damit $q_i \circ f$ für alle i stetig. Nach Satz 2.15 folgt, dass f stetig ist.
Es sei umgekehrt f stetig. Also ist $q_i \circ f$ und damit $f_i \circ p_i$ stetig für alle i. Für alle i ist $(f_i \circ p_i)^{-1}[U]$ offen, also ist $p_i^{-1}[f_i^{-1}[U]]$ offen in $\prod_{j\in I} X_j$. Da p_i eine offene Abbildung is, ist $p_i[p_i^{-1}[f_i^{-1}[U]]] = f_i^{-1}[U]$ offen in X_i. □

2.3 Die Initialtopologie

Definition 2.18. Es sei Y eine Menge, I eine Indexmenge und seien $f_i\colon Y \to (X_i, \mathscr{O}_i)$ Funktionen in topologische Räume $(X_i, \mathscr{O}_i)$ für alle $i \in I$. Dann heißt die durch die Subbasis

$$\mathscr{S} := \left\{ f_i^{-1}[U_i] \mid U_i \in \mathscr{O}_i, i \in I \right\}$$

auf Y erzeugte Topologie die *Initialtopologie von* $\left(Y, (f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}\right)$.

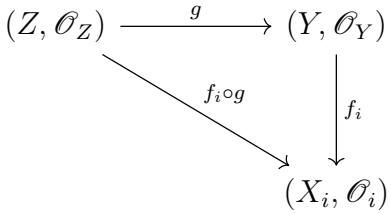
Bemerkung 2.19. Falls $I = \emptyset$ ist, so erhält man $\mathscr{S} = \emptyset$ und als Initialtopologie $\{\emptyset, Y\}$. Falls $Y = \emptyset$ ist, so ist $f_i = \emptyset$ für alle i und wir erhalten $\mathscr{S} = \{\emptyset\}$ und $\{\emptyset\}$ als Initialtopologie.

Bemerkung 2.20. Es sei $\mathscr{O}_Y$ die Initialtopologie von $\big(Y, (f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}\big)$. Dann sind alle $f_i\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X_i, \mathscr{O}_i)$ stetig, aber im Allgemeinen nicht offen.

Satz 2.21. *Es sei $\mathscr{O}_Y$ die Initialtopologie von $\big(Y, (f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}\big)$. Dann ist $\mathscr{O}_Y$ die gröbste Topologie auf Y, sodass alle Abbildungen f_i stetig sind. Für jede Abbildung*

$$g\colon (Z, \mathscr{O}_Z) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$$

gilt: g ist genau dann stetig, wenn $f_i \circ g$ für alle i stetig ist.



Beweis: Es sei $\mathscr{O}'$ eine weitere Topologie auf Y, sodass alle f_i stetig sind. Dann gilt $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{O}'$ und damit $\mathscr{O}_Y \subseteq \mathscr{O}'$.
Die Vorwärtsrichtung der zweiten Behauptung folgt daraus, dass die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist.
Es seien umgekehrt alle $f_i \circ g$ stetig. Es genügt zu überprüfen, dass die Urbilder der Mengen der genannten Subbasis unter g offen sind: Für alle $i \in I$ und $U \in \mathscr{O}_i$ gilt

$$g^{-1}[f_i^{-1}[U]] = (f_i \circ g)^{-1}[U] \in \mathscr{O}_Z.$$

Demnach ist g stetig.

□

2.4 Die Finaltopologie

Definition 2.22. Es sei Y eine Menge, I eine Indexmenge und seien $f_i\colon (X_i, \mathscr{O}_i) \to Y$ Funktionen auf topologischen Räumen $(X_i, \mathscr{O}_i)$ für alle $i \in I$. Dann heißt die durch die Subbasis

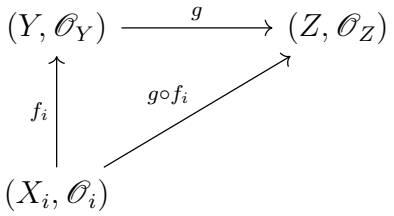
$$\mathscr{S} := \big\{O \subseteq Y \mid \forall i \in I\ f_i^{-1}[O] \in \mathscr{O}_i\big\}$$

auf Y erzeugte Topologie die *Finaltopologie von* $\left((f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}, Y\right)$.

Satz 2.23. *Es sei $\mathscr{O}_Y$ die Finaltopologie von $\left((f_i, X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}, Y\right)$. Dann ist $\mathscr{O}_Y$ die feinste Topologie auf Y, sodass alle Abbildungen f_i stetig sind. Für jede Abbildung*

$$g\colon (Y, \mathscr{O}_Y) \to (Z, \mathscr{O}_Z)$$

gilt: g ist genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für alle i stetig ist.



Beweis: Es sei $\mathscr{O}'$ eine weitere Topologie auf Y, sodass alle f_i stetig sind. Dann wählen wir $g = \mathrm{id}$. Es folgt, dass $g \circ f_i = f_i$ stetig ist. Demnach ist auch id stetig und $\mathscr{O}' = \mathrm{id}[\mathscr{O}'] \subseteq \mathscr{O}_Y$.
Wenn g stetig ist, sind auch alle $g \circ f_i$ stetig, da ja nach Voraussetzung alle f_i stetig sind. Es seien umgekehrt alle $g \circ f_i$ stetig. Es sei nun $U \in \mathscr{O}_Z$, dann gilt für alle $i \in I$, dass

$$f_i^{-1}[g^{-1}[U]] = (g \circ f_i)^{-1}[U] \in \mathscr{O}_i,$$

und damit ist $g^{-1}[U] \in \mathscr{S} \subseteq \mathscr{O}_Y$.

□

Beispiel 2.24. Es sei $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation (d.h. R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv). Für $x \in X$ sei

$$[x]_R := \{z \in X \mid zRx\}$$

die Äquivalenzklasse von x in (X, R). Für $x, y \in X$ gilt stets $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon X &\to {}^{X}\!/_{R} \\ x &\longmapsto [x]_R \end{aligned}$$

heißt *Quotientenabbildung*.

Definition 2.25. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X und p die zugehörige Projektion. Die *Quotiententopologie* auf ${}^{X}/_{R}$ von $\left((p, X, \mathscr{O}), {}^{X}/_{R}\right)$ ist definiert als

$$\mathscr{O}_{{}^{X}/_{R}} = \left\{ A \subseteq {}^{X}/_{R} \mid p^{-1}[A] \in \mathscr{O} \right\}.$$

Bemerkung 2.26. Die durch $\left((p, X, \mathscr{O}), {}^{X}/_{R}\right)$ gegebene Finaltopologie ist gerade die Quotiententopologie $\mathscr{O}_{{}^{X}/_{R}}$.

Lemma 2.27. *Es sei $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}')$ eine Abbildung. Außerdem sei R eine Äquivalenzrelation auf X mit der Eigenschaft*

$$xRx' \to f(x) = f(x'). \tag{2.1}$$

Dann ist $\bar{f}\colon {}^{X}/_{R} \to Y$ durch $\bar{f}([x]_R) := f(x)$ wohldefiniert.

Wenn sogar

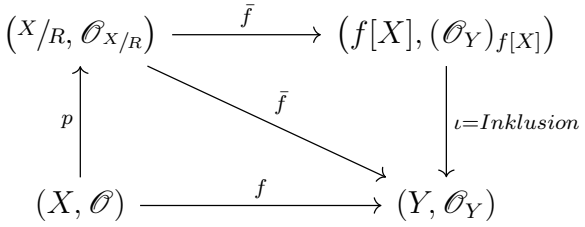
$$xRx' \leftrightarrow f(x) = f(x'), \tag{2.2}$$

dann ist $\bar{f}$ injektiv.

Beweis: Wohldefiniertheit: Wenn $[x]_R = [x']_R$, so ist xRx' und damit $f(x) = f(x')$. Die zweite Aussage ist offensichtlich. □

Satz 2.28. *Es sei $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ stetig und R eine Äquivalenzrelation mit Eigenschaft* (2.1)*. Dann ist $\bar{f}\colon \left({}^{X}/_{R}, \mathscr{O}_{{}^{X}/_{R}}\right) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ stetig.*

Im Diagramm hat man folgende Situation.



Beweis: Erster Beweis für die Stetigkeit: Es sei $A \in \mathcal{O}_Y$. Es ist $f = \bar{f} \circ p$. Dann ist $\bar{f}^{-1}[A] \in \mathcal{O}_{X/R}$, da $p^{-1}[\bar{f}^{-1}[A]] = (\bar{f} \circ p)^{-1}[A] = f^{-1}[A] \in \mathcal{O}$.

Beweis mit Diagramm: Weil $f = \bar{f} \circ p$, folgt dies aus dem Satz über die Finaltopologie: $\bar{f}$ ist stetig genau dann, wenn $f = \bar{f} \circ p$ stetig ist. Im unteren Dreieck ist das Diagramm aus Satz 2.23 über die Finaltopologie. Im oberen Dreieck steht das Diagramm aus dem Satz 2.6 von der Spurtopologie als Initialtopogie. □

Definition 2.29. Es sei f stetig und es sei R wie in Lemma 2.27 mit der Eigenschaft (2.2). Wenn $\bar{f}\colon \left({}^{X}\!/_{R}, \mathscr{O}_{X/R}\right) \to (f[X], \mathscr{O}')$ offen ist, so heißt f *identifizierende Abbildung*.

Man überlegt sich: Wenn $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}')$ stetig und surjektiv ist und $\bar{f}\colon (X/R, \mathscr{O}_{X/R}) \to (Y, \mathscr{O}')$ offen ist, so ist $\bar{f}({}^{X}\!/_{R}, \mathscr{O}_{X/R}) \to (f[X], \mathscr{O}')$ ein Homöomorphismus. Wenn $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}')$ stetig ist und $\bar{f}\colon (X/R, \mathscr{O}_{X/R}) \to (Y, \mathscr{O}')$ offen ist, so ist $\bar{f}\colon ({}^{X}\!/_{R}, \mathscr{O}_{X/R}) \to (Y, \mathscr{O}')$ eine Einbettung.

2.5 Der Summenraum

Definition 2.30. Es sei I eine Indexmenge und seien $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Die $(X_i)_{i\in I}$ seien paarweise disjunkt, d.h. $i \neq j \to X_i \cap X_j = \emptyset$ (falls die $(X_i)_{i\in I}$ nicht disjunkt sind, so kann man sie durch $X_i' := X_i \times \{i\}$ künstlich disjunkt machen und dann mit der Produkttopologie der Topologie auf X_i und der Einermengentopologie auf $\{i\}$ versehen).

Die *topologische Summe von* $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I}$ ist definiert als

$$\sum_{i\in I} (X_i, \mathscr{O}_i) := \left(\bigcup_{i\in I} X_i, \left\{ Z \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i \mid (\forall i \in I)\, (Z \cap X_i \in \mathscr{O}_i) \right\} \right).$$

2.6 Das Anheften oder Zusammenkleben von Räumen

Nun stellen wir eine spezielle Familie von finalen Topologien her. Die Relation R wird hier von f zusammen mit der Identität auf der topologischen Summe von $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ erzeugt. Diese beiden zusammen spielen die Rolle von f im vorigen Abschnitt.

Definition 2.31. Es seien X, Y disjunkt und seien $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ topologische Räume. Es sei $A \subseteq X$ und $f\colon A \to Y$ stetig bezüglich der Spurtopologie auf A. Auf $X \cup Y$ definieren wir die durch f erzeugte Äquivalenzrelation R durch

$$z_1 R z_2 :\Longleftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 \in A \wedge f(z_1) = f(z_2) & \text{oder} \\ z_1 \in A \wedge f(z_1) = z_2 & \text{oder} \\ z_2 \in A \wedge f(z_2) = z_1 & \text{oder} \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Man kann nachrechnen, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Im Einzelnen sind die Klassen: Falls $z \in A$, so ist $[z]_R = f^{-1}[\{f(z)\}] \cup \{f(z)\}$. Falls $z \in f[A]$, so ist $[z]_R = \{z\} \cup f^{-1}[\{z\}]$. Falls $z \in X \cup Y \setminus (A \cup f[A])$, so ist $[z]_r = \{z\}$. Der Raum $^{((X,\mathcal{O}_X)+(Y,\mathcal{O}_Y))}/_R =: Y \cup_f X$ heißt die *Adjunktion/Anheftung/ Zusammenklebung von X an Y mithilfe von f.*

Beispiel 2.32. Spezialfall: $Y = \{1\}$, d.h. $xRx' \Leftrightarrow x = x' \vee x, x' \in A$. Dann heißt $Y \cup_f X$ *Zusammenschlagen/Zusammenfalten von A* und wird auch $^X/_A$ geschrieben.

Bemerkung 2.33. Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen (siehe z.B. Satz 19.3 Greenburg Algebraische Topologie, Es seite 83f) gilt:

1. $\iota\colon Y \to Y \cup_f X$ stetig, offen und eine Einbettung, wobei ι die Inklusionsabbildung ist.

2. $\mathrm{id}\colon X \setminus A \to Y \cup_f X$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

Beispiel 2.34. Das *Möbiusband*: Es sei $X = [0,1] \times [0,1]$, $[0,1]$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$ versehen. $Y = [0,1]$, ebenfalls mit dieser Topologie. $A = \{(x,z) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$. Die Funktion $f\colon A \to Y$ mit $f(0,y) = 1-y$, $f(1,y) = y$ verklebt die Ränder $\{(x,z) \in X : x = 0\}$ und $\{(x,z) \in X : x = 1\}$ verdreht.

Man kann auch mit einer kleineren Repräsentation arbeiten wie folgt: Wir nehmen $X = [0,1) \times [0,1]$, $[0,1]$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$ versehen. $Y = \{1\} \times [0,1]$, $A = \{0\} \times [0,1]$, $f\colon A \to Y$ mit $f(0,y) = (1, 1-y)$.

Das „dreifach verdrillte Möbiusband" ist vom einfach verdrillten nicht zu unterscheiden, denn sie sind homöomorph. Mehrfache Verdrillung sieht man erst bei Einbettung in den $\mathbb{R}^3$. Man vergleicht die verschiedenen Einbettungen dann via "ambient isotopy".

Kapitel 3

Zusammenhängende und wegzusammenhängende Räume

Definition 3.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine nicht-leeren, disjunkten, offenen Mengen U_1, U_2 gibt, sodass $U_1 \cup U_2 = X$.

Lemma 3.2. *$(X, \mathscr{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

Beweis: Es sei $(X, \mathscr{O})$ nicht zusammenhängend und seien U_1, U_2 nicht-leere, disjunkte und offene Mengen, sodass $U_1 \cup U_2 = X$. Dann ist $X \neq U_1 \neq \emptyset$ und $U_1 = X \setminus U_2$ ist offen und abgeschlossen zugleich.
Es sei umgekehrt U_1 offen und abgeschlossen, so dass $X \neq U_1 \neq \emptyset$. Dann ist $\{U_1, X \setminus U_1\}$ eine offene Partition von X. □

Bemerkung 3.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige Funktion $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}))$ gibt, die surjektiv ist.

Proposition 3.4. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $a < b$. Das offene Intervall (a, b) ist zusammenhängend (in der Spurtopologie bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$).*

Beweis: Angenommen, (a, b) sei nicht zusammenhängend. Es seien O_1, O_2 nicht-leer, offen und disjunkt, sodass $O_1 \cup O_2 = (a, b)$. O.B.d.A. gibt es $x_1 \in O_1$ und $x_2 \in O_2$, so dass $x_1 < x_2$. Wir setzen

$$S := \{s \in (a, b) \mid [x_1, s] \subseteq O_1\}$$

Dann ist S durch x_2 nach oben beschränkt. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, hat S ein Supremum m. Wir zeigen, dass $m \notin O_1$ und $m \notin O_2$.

- Angenommen $m \in O_1$. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U_\varepsilon(m) \subseteq O_1$. Damit ist auch $m + \frac{\varepsilon}{2} \in S$.
- Angenommen $m \in O_2$. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $U_\varepsilon(m) \subseteq O_2$. Damit ist aber $m - \frac{\varepsilon}{2} \notin S$.

Da beide Fälle zum Widerspruch führen, ist (a, b) zusammenhängend. □

Definition 3.5. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. A heißt zusammenhängend (in $(X, \mathcal{O})$), wenn $(A, \mathcal{O}_A)$ zusammenhängend ist.

Satz 3.6 (Über die Vererbung des Zusammenhangs auf den Abschluss)**.**
Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Dann gilt:

1. $\forall B \ \big(A \subseteq B \subseteq \bar{A} \to B$ *ist zusammenhängend*$\big)$
2. $\forall B \ \Big(A \cap \mathring{B} \neq \emptyset \wedge A \cap (X \smallsetminus B)^\circ \neq \emptyset \to A \cap \partial B \neq \emptyset\Big)$

Beweis:

1. Es sei B, sodass $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ und B nicht zusammenhängend, d.h. $B \subseteq U_1 \sqcup U_2$, sodass $U_1 \cap B \neq \emptyset$, $U_2 \cap B \neq \emptyset$, U_1, U_2 offen. Dann ist $U_1 \sqcup U_2 \supseteq B \supseteq A$. Da U_i offen ist und $U_i \cap \bar{A} \neq \emptyset$, ist $U_i \cap A \neq \emptyset$ (sonst wäre $\bar{A} \smallsetminus U_i$ eine kleinere abgeschlossene Menge, die A enthält). Also ist U_1, U_2 eine offene Zerlegung von A.
2. Falls $A \cap \partial B = \emptyset$, ist $\left\{\mathring{B}, (X \smallsetminus B)^\circ\right\}$ eine offene Partition von A. Es gilt nämlich stets $X = \mathring{B} \sqcup (X \smallsetminus B)^\circ \sqcup \partial B$ und nach Voraussetzung ist $A \cap \partial B = \emptyset$.

□

Satz 3.7. *Es seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \mathscr{O}')$ topologische Räume, X sei zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ sei stetig. Dann ist auch $f[X]$ zusammenhängend.*

Beweis: Es sei $f[X]$ nicht-zusammenhängend und sei $\{V_1, V_2\}$ eine offene Partition von $f[X]$. Dann ist $\{f^{-1}[V_1], f^{-1}[V_2]\}$ eine offene Partition von X (da f stetig ist). □

Bemerkung 3.8. Der Zwischenwertsatz ist ein Spezialfall dieses Satzes, wenn man bedenkt, dass die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Intervalle sind.

Lemma 3.9. *Ein topologischer Raum $(X, \mathscr{O})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U}$ von X (d.h. $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{O}$ und $\bigcup \mathscr{U} = X$) und für alle $a, b \in X$ eine endliche Teilfolge $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$U_i \in \mathscr{U}$,*
2. *$a \in U_1 \setminus U_j$ für alle $j > 1$,*
3. *$b \in U_n \setminus U_j$ für alle $j < n$.*
4. *$U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$.*

Beweis: Es sei $\{U_1, U_2\}$ eine offene Partition von X und wähle $a \in U_1$ und $b \in U_2$. Dann ist $\mathscr{U} := \{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung ohne die gewünschte Eigenschaft.
Für die umgekehrte Richtung definieren wir, gegeben die offene Überdeckung $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{O}$ von X, eine Äquivalenzrelation auf X: Für $x, y \in X$ gelte $x \sim y$ (genauer $x \sim_{\mathscr{U}} y$) genau dann, wenn es $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ gibt, sodass

1. $U_i \in \mathscr{U}$,
2. $x \in U_1 \setminus U_j$ für alle $j > 1$ und $y \in U_n \setminus U_j$ für alle $j < n$.
3. $U_i \cap U_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$.

In diesem Falle sagen wir, dass $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ eine Kette von x nach y ist. Dass $\sim$ reflexiv und symmetrisch ist, ist klar. Zur Transitivität: Es sei $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ eine Kette von x nach y und $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ eine Kette von y nach z.
Es sei $k := \min \{i \leq n \mid \exists j \in \{1, \dots, m\} \ (U_i \cap V_j) \neq \emptyset\}$ (k ist wohldefiniert, da $y \in U_n \cap V_1$) und $l := \max \{j \leq m \mid U_k \cap V_j \neq \emptyset\}$. Es folgt, dass die Menge $\langle U_1, \dots, U_k, V_l, \dots, V_m \rangle$ eine Kette von x nach z ist.
Jede Äquivalenzklasse ist offen: Es sei $x \sim y$. Wir zeigen, dass es eine offene Umgebung von y gibt, die ganz in $[x]_\sim$ liegt. Es sei $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ eine Kette von x nach y. Wenn $z \in U_n$, definieren wir $k := \min\{i \leq n \mid z \in U_i\}$. Dann ist $\langle U_1, \dots, U_k \rangle$ eine Kette von x nach z. Also ist $U_n \subseteq [x]_\sim$. Insgesamt ist $[x]_\sim^\circ = [x]_\sim$ und die Menge ist somit offen.

Da Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind, ist auch jede Äquivalenzklasse abgeschlossen. Weil X zusammenhängend ist, sind X und $\emptyset$ die einzigen Mengen, die offen und abgeschlossen sind. Also gibt es nur eine einzige Äquivalenzklasse. Dies entspricht der Aussage des Lemmas. □

Satz 3.10. *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, A, B zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$. Dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.*

Beweis: Es seien $x \in A \setminus B$ und $y \in B \setminus A$ gegeben und $\mathscr{U}$ sei einen offene Überdeckung von X. Wir nehmen ein $z \in A \cap B$. Da A zusammenhängend ist, gilt $x \sim_{\mathscr{U}} z$ und da B zusammenhängend ist, gilt $z \sim_{\mathscr{U}} y$. Da $\sim_{\mathscr{U}}$ transitiv ist, gilt $x \sim_{\mathscr{U}} y$. □

Bemerkung 3.11. Das vorherige Lemma lässt sich auf folgende Weise verallgemeinern: Es $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und es sei $I = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge und es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ zusammenhängende topologische Unterräume für alle $i \in I$. Es sei weiterhin für benachbarte $1 \leq i$, $i + 1 \leq n$, $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} X_i$ zusammenhängend. Man kann auch $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{Z}$ oder andere geeignete zusammenhängende Graphen zulassen. Bei längeren Limiten genügt Benachbarkeit nicht mehr als Beschreibung.

Satz 3.12. *Es sei I eine Indexmenge und seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für alle $i \in I$. Der Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle $(X_i, \mathscr{O}_i)$ zusammenhängend sind.*

Beweis: Es sei $\prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend. Dann ist für jedes $i \in I$ der Raum X_i zusammenhängend, weil die Projektion p_i stetig ist (nach Lemma 3.7).
Es sei umgekehrt $a \in \prod_{i \in I} X_i$ und

$$B = \left\{ b \in \prod_{i \in I} X_i \mid \exists Y \subseteq \prod_{i \in I} X_i \text{ zusammenhängend, so dass } a, b \in Y \right\}.$$

B ist zusammenhängend nach der vorherigen Bemerkung (denn B ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von $\prod_{i \in I} X_i$, die a enthalten).

Wir zeigen nun, dass für alle offenen Mengen O gilt, dass $O \cap B \neq \emptyset$. Es genügt, Elemente aus der Basis aus Definition 2.11 zu betrachten. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass O die Gestalt $O = \prod_{i \in I_0} U_i \times \prod_{i \in I \setminus I_0} X_i$ hat für offene Mengen $U_i \in \mathscr{O}_i$ und $I_0 = \{1, \ldots, n\}$. Es sei $b_i \in U_i$

für $i \in I_0$, dann ist $b := (b_1, \ldots, b_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \in O$. Setze nun für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$Z_j := \{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_{j-1}\} \times X_j \times \{a_{j+1}\} \times \ldots \times \{a_n\} \times \prod_{i \in I \setminus I_0} \{a_i\}\,.$$

Dann ist Z_j zusammenhängend, da X_j zusammenhängend ist. Außerdem gilt $(b_1, \ldots, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)^\frown \langle a_i : i \in I \setminus I_0\rangle \in Z_j \cap Z_{j+1} \neq \emptyset$ und damit ist nach Satz 3.10 auch

$$Z := \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$$

zusammenhängend. Nach Definition der Z_j ist $a \in Z_1$ und $b \in Z_n$. Damit folgt $Z \cap O \neq \emptyset$ und da Z zusammenhängend ist auch $Z \subseteq B$. Somit haben wir gezeigt, dass $O \cap B \neq \emptyset$.
Daraus folgt, dass $\bar{B} = \prod_{i \in I} X_i$. Damit gilt $B \subseteq \prod_{i \in I} X_i \subseteq \bar{B}$ und mit Satz 3.6 folgt, dass $\prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängend ist. □

Definition 3.13. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $\mathscr{K}(x)$ die *Zusammenhangskomponente von* x, wobei

$$\mathscr{K}(x) := \bigcup \{Y \subseteq X \mid x \in Y \text{ und } Y \text{ zusammenhängend}\}\,.$$

Definition 3.14. Falls $\forall x \in X \;\; \mathscr{K}(x) = \{x\}$, dann heißt $(X, \mathscr{O})$ *total unzusammenhängend*.

Definition 3.15. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.

1. Es sei $I = [0,1]_{\mathbb{R}}$ mit der Standardtopologie. Eine Abbildung $\gamma\colon I \to X$ heißt *Weg von x nach y*, wenn γ stetig ist und $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

2. $(X, \mathscr{O})$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in X$ ein Weg von x nach y existiert.

3. $(X, \mathscr{O})$ heißt *lokal zusammenhängend (lokal wegzusammenhängend)*, wenn

$$(\forall x \in X)(\forall U \in \mathscr{U}(x))(\exists V \in \mathscr{U}(x))\big(V \subseteq U \wedge V \text{ zusammenhängend } (\text{wegzusammenhängend})\big).$$

Definition 3.16. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $\mathscr{K}_w(x)$ die *Wegzusammenhangskomponente von x in $(X, \mathscr{O})$* mit

$$\mathscr{K}_w(x) := \{y \in X \mid \exists \gamma \colon [0,1] \to X \ (\gamma(0) = x, \gamma(1) = y)\}.$$

Satz 3.17.

1. *Jeder (lokal) wegzusammenhängende Raum ist (lokal) zusammenhängend.*
2. *Wenn X lokal wegzusammenhängend ist, ist $\mathscr{K}_w(x)$ offen für alle x. Wenn X lokal zusammenhängend ist, ist $\mathscr{K}(x)$ offen für alle x.*
3. *Wenn X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist X wegzusammenhängend.*
4. *$\prod_{j \in J} X_j$ ist lokal zusammenhängend genau dann, wenn jedes X_i lokal zusammenhängend ist und für alle bis auf endlich viele $j \in J$ gilt, dass X_j zusammenhängend ist.*

Beweis:

1. Es sei X nicht zusammenhängend und $X = U \cup V$ mit U, V disjunkt, nicht-leer und offen. Es sei $x \in U, y \in V$. Falls $\gamma \colon [0,1] \to X$ stetig ist mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, so ist $I = \gamma^{-1}[U] \cup \gamma^{-1}[V]$. Weiterhin sind $\gamma^{-1}[U], \gamma^{-1}[V]$ nicht-leer und offen (da γ stetig ist) und disjunkt (da U und V disjunkt sind). Damit wäre I nicht zusammenhängend, ein Widerspruch.

2. Es sei X lokal wegzusammenhängend. Damit gilt $\forall x \, \exists V_x \in \mathscr{U}(x)$, sodass V_x wegzusammenhängend. Dann gilt

$$\mathscr{K}_w(x) = \bigcup \{V_y \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

   Für die zweite Aussage: Es sei $x \in X$, $y \in \mathscr{K}(x)$. Da X lokal zusammenhängend ist, gibt es $V_y \in \mathscr{U}(y)$, sodass V_y zusammenhängend ist. Damit gilt $V_y \cap \mathscr{K} \neq \emptyset$, also ist $V_y \cup \mathscr{K}$ zusammenhängend und $V_y \cup \mathscr{K} \ni x$. Also ist $V_y \subseteq \mathscr{K}(x)$.

3. Aus 2 folgt, dass $\mathscr{K}_w(x)$ offen ist für alle x. Es sei $\{K_j \mid j \in J\}$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X, wobei $K_i \neq K_j$ für $i \neq j$. Dann ist

$$K_1 \cup \bigcup \{K_j \mid j \in J \setminus \{1\}\} = X.$$

Weil X zusammenhängend ist, muss $\bigcup\{K_j \mid x \in J \setminus \{1\}\}$ leer sein (offen und disjunkt sind die Mengen). Damit gibt es nur eine Wegzusammenhangskomponente, d.h. X ist wegzusammenhängend.

4. Übung.

□

Bemerkung 3.18. 1. Es gibt zusammenhängende Räume, die nicht lokal wegzusammenhängend sind: Es sei $X := \{(x, \sin(x^{-1})) \mid x \in (0,1)\}$. Wir bilden den Abschluss im $\mathbb{R}^2$.

$$\bar{X} = \left\{\left(x, \sin(x^{-1})\right) \mid x \in (0,1)\right\} \cup \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}.$$

$\bar{X}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend: Es sei $x_2 := (0,1)$ und $x_1 := (0.5, \sin(2))$. Dann ist $\mathscr{K}_w(x_1) \cap \mathscr{K}_w(x_2) = \emptyset$.

Dies sieht man wie folgt: Angenommen, es sei $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ein Weg von $(0.5, \sin(2))$ nach $(0,1)$. Wie nehmen $x_{\min} = \min\{x \in [0,1] : \gamma_0(x) = 0\}$ und $y_{\min} = \gamma_1(x_{\min})$. Da γ stetig ist, gibt es diese. Da jedoch $w \mapsto \sin(\frac{1}{w})$ an der Stelle $w = 0$ nicht stetig ist, wird in jeder Umgebung $(x_0 - \delta, x_0]$ der Weg (γ_0, γ_1) in der zweiten Koordinate alle Werte zwischen -1 und 1 annehmen, denn $\gamma_1(u) = \sin(\gamma_0(u))$ für $u \in (x_{\min} - \delta, x_{\min}]$. Wenn γ stetig wäre, müsste $\gamma_1(u)$ für $u \to x_{\min}$ aber gegen $y_{\min}$ konvergieren. Der vermeintliche Weg existiert also nicht.

2. Es gibt wegzusammenhängende Räume, die nicht lokal zusammenhängend sind: Es sei

$$X := \{(0,y) \mid y \in [0,1]\} \cup \{(x, 1 - (n+1)\cdot x) : x \in [0, \frac{1}{n+1}], n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge X wird mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}^2$ ausgestattet. Für $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ gibt es keine zusammenhängende Umgebung.

Frage 3.19. Anregung zum Basteln eines Weges: Es sei $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$ der reelle Raum mit der Standardtopologie. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(\mathbb{R}_n, \mathscr{O}_n)$ homöomorph zu $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$. Ist $\prod_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}_n, \mathscr{O}_n)$ lokal wegzusammenhängend? Wie wäre es für überabzählbar viele Faktoren?

Kapitel 4

Filter und Konvergenz

Definition 4.1. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X *konvergiert gegen* x, wir schreiben $x_n \to x$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0\ (x_n \in U)\,.$$

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt einer Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\, \forall n_0\, \exists n \geq n_0\ (x_n \in U)\,.$$

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Berührungspunkt einer Teilmenge* $A \subseteq X$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\ (U \cap A \neq \emptyset)\,.$$

Beispiel 4.2. Es sei $X := \omega_1 \cup \{\omega_1\}$ versehen mit der Ordnungstopologie. Dann ist der Punkt ω_1 Berührpunkt von der Menge ω_1, aber es gibt keine Folge in ω_1, die gegen ω_1 konvergiert.

Beispiel 4.3. Es sei $X := \mathbb{R}^{|\mathbb{R}|} = \prod_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_r$ mit der Produkttopologie bzgl. der Standardtopologie. Es sei $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sodass $\forall r \in \mathbb{R}\, f(r) = 0$. Eine Umgebungsbasis von f ist gegeben durch

$$\mathscr{U}(f) = \left\{ \prod_{j\in J_0} O_i \times \prod_{j\in\mathbb{R}\setminus J_0} \mathbb{R} \mid J_0 \subseteq \mathbb{R}, J_0 \text{ endlich}, O_j \in \mathscr{U}(0)_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Es sei

$$f_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq r; \\ 1, & \text{falls } x = r. \end{cases}$$

Dann ist f Berührungspunkt von $\{f_r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Satz 4.4. *Es seien $(X, \mathscr{O})$ und $(Y, \mathscr{O}')$ topologische Räume mit abzählbarer Umgebungsbasis, und sei $x \in X$.*

1. *Es sei $A \subseteq X$. Dann ist $x \in \bar{A} \leftrightarrow \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $x_n \to x$, wobei für die Vorwärtsrichtung das Auswahlaxiom benutzt wird.*
2. *$f\colon X \to Y$ ist stetig in x genau dann, wenn*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x))\,.$$

Hier wird für die Rückwärtsrichtung das Auswahlaxiom benutzt.

Dieser Satz wurde in der Analysis I bewiesen.

Definition 4.5. Eine Teilmenge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt *Filter über X*, wenn

1. $X \in \mathscr{F}$, bzw. $\mathscr{F} \neq \emptyset$. $\emptyset \notin \mathscr{F}$.
2. $A \in \mathscr{F} \wedge A \subseteq B \to B \in \mathscr{F}$.
3. $A, B \in \mathscr{F} \to A \cap B \in \mathscr{F}$.

Beispiel 4.6. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathscr{U}(x)$ ein Filter über X (der sogenannte *Umgebungsfilter*).

Definition 4.7. Es sei $\mathscr{F}$ ein Filter über X. Eine Teilmenge $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ heißt *Filterbasis von $\mathscr{F}$*, wenn

$$\forall F \in \mathscr{F}\ \exists B \in \mathscr{B}\ (B \subseteq F)\,.$$

Bemerkung 4.8. (1) $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist Basis eines Filters auf X genau dann, wenn

$$\emptyset \notin \mathscr{B} \wedge \forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}\ \exists B_3 \in \mathscr{B}\ (B_1 \cap B_2 \supseteq B_3)\,.$$

(2) Falls $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ nicht gegen endliche Schnitte abgeschlossen ist, aber jeder endliche Schnitt aus $\mathscr{S}$ nicht leer ist, so ist der von $\mathscr{S}$ auf X erzeugte Filter

$$\mathscr{F} := \mathrm{filter}_X(\mathscr{S}) = \left\{ U \subseteq X \mid \exists B_0, \ldots, B_n \in \mathscr{S}\ \left(U \supseteq \bigcap_{i=0}^{n} B_i \right) \right\}.$$

Die Menge der endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathscr{S}$ ist eine Basis von $\mathscr{F}$. $\mathscr{S}$ kann man eine Subbasis nennen. Die Grundmenge X muss mitgenannt werden, denn jede Obermenge von X erfüllt auch die Voraussetzungen, und auf einer Obermenge $Y \supseteq X$ wird ein Oberfilter $\mathrm{filter}_Y(\mathscr{S}) \supseteq \mathrm{filter}_X(\mathscr{S})$ erzeugt.

(3) Der von $\emptyset$ erzeugte Filter ist $\mathscr{F} = \{X\}$.

Definition 4.9. Ein Filter $\mathscr{F}$ heißt *frei*, wenn $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$. Falls $\mathscr{F}$ nicht frei ist, so heißt $\mathscr{F}$ *fixiert*.

Beispiel 4.10. Der *Fréchet-Filter* über $\mathbb{N}$ ist $\mathscr{F} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$. Er ist frei.

Definition 4.11. $\mathscr{U}$ heißt *Ultrafilter*, wenn $\mathscr{U}$ ein $\subseteq$-maximaler Filter ist, d.h.

$$\forall A \subseteq X \ (A \in \mathscr{U} \vee X \setminus A \in \mathscr{U}) .$$

Satz 4.12. *Jeder Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.*

Definition 4.13. Es sei H eine Menge und $\leq_H$ eine Halbordnung auf H (d.h., $\leq_H$ ist transitiv, reflexiv und antisymmetrisch). $(H, \leq_H)$ heißt *induktiv*, wenn jede Menge $K \subseteq H$, die durch $\leq_H$ total geordnet wird (d.h. für $x, y \in K$ gilt $x \leq_H y$, $y \leq_H x$ oder $x = y$), eine obere Schranke besitzt.

Satz 4.14. *Das Lemma von Zorn. Jede induktive Halbordnung hat ein maximales Element.*

Beweis: Es sei $(H, \leq_H)$ eine induktive Halbordnung. Wir setzen $y <_H x$ genau dann, wenn $y \leq_H x$ und $y \neq x$.

Es sei $h\colon \mathscr{P}(H) \setminus \{\emptyset\} \to H$ eine Auswahlfunktion, d.h. $\forall X \subseteq H$, $X \neq \emptyset$ ist $h(X) \in X$. Es sei K eine Kette in $(H, <_H)$ und sei $x \in K$. Dann sei $K_{<x} = \{y \in K \mid y <_H x\}$. Wir definieren: Eine Kette $K \subseteq H$ heißt h-Kette, falls $(K, <_H)$ wohlgeordnet ist und für alle $x \in K$ gilt

(1) $K_{<x}$ hat eine obere Schranke.

(2) $x = h(\{m \in H \mid m \text{ obere Schranke von } K_{<x}\}$

Wir zeigen folgende Zwischenbehauptung: Für je zwei h-Ketten K, L gilt:

$$(K = L) \vee (\exists x \in L)(K = L_{<x}) \vee (\exists x \in K)(L = K_{<x}).$$

Dies zeigt man durch transfinite Induktion über die längere der beiden Wohlordnungen K, L. Wir nehmen o.B.d.A $K \setminus L \neq \emptyset$ an und nehmen das $<_H$ kleinste Element $x \in K \setminus L$. (Hier geht also die Wohlordnungseigenschaft ein.) Dann gilt für $K_{<x}$ und L die Induktionsvoraussetzung, also $K_{<x} = L$ oder $K_{<x} = L_{<z}$ für ein $z \in L$ oder $(K_{<x})_{<y} = L$ für ein $y \in K_{<x}$. Nach

Wahl von x sind die letzten beiden Fälle ausgeschlossen. Im mittleren Fall folgt dies aus Eigenschaft (2) der h-Ketten. Daher ist $K_{<x} = L$, und die Behauptung gezeigt.

Aus der Zwischenbehauptung folgt: Die Vereinigung U aller h-Ketten ist selbst eine h-Kette. Dieses U hat eine obere Schranke m, da H induktiv ist. Dann ist $m \in U$ und m maximal in H, da andernfalls U zu einer echt längeren h-Kette verlängert werden könnte. □

Beweis von Satz 4.12: Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter (eine Filterbasis ist schon ausreichend) und

$$H = \{\mathcal{G} \subseteq \mathscr{P}(X) \mid \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F},\ \mathcal{G} \text{ Filter auf } X\}\,.$$

$(H, \subseteq)$ ist eine induktive Halbordnung, denn wenn $(K, \subseteq)$ total geordnet ist, so ist $\bigcup K$ eine obere Schranke von K. Nach dem Lemma von Zorn (Satz 4.14) hat H ein maximales Element. Dies ist dann ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ als Teilmenge enthält. □

Definition 4.15.

(1) Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{F}$ ein Filter auf X. $\mathscr{F}$ *konvergiert gegen* $x \in X$, wenn $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathscr{F}$. Wir schreiben $\mathscr{F} \to x$.

Beachten Sie, dass x nicht eindeutig zu sein braucht. Für die Eindeutigkeit nutzt man die Hausdorff-Eigenschaft.

(2) $x \in X$ ist *Berührungspunkt von* $\mathscr{F}$, wenn

$$\forall U \in \mathscr{U}(x)\, \forall F \in \mathscr{F}\ (U \cap F \neq \emptyset)\,.$$

Definition 4.16. Es seien $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ Filter. Falls $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$, so heißt $\mathscr{F}_1$ gröber als $\mathscr{F}_2$ und $\mathscr{F}_2$ heißt feiner als $\mathscr{F}_1$.

Bemerkung 4.17. Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $(X, \mathscr{O})$ und $x \in X$. Dann gilt: x ist Berührpunkt von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn es ein $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ gibt, sodass $\mathcal{G} \to x$.

Beweis: Es sei $\mathcal{G}$ der von $\{U \cap F \mid U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter. Weil x Berührpunkt von $\mathcal{F}$ ist, ist $\emptyset \notin G$. Die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Schnitte folgt aus

$$(U_1 \cap F_1) \cap (U_2 \cap F_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (F_1 \cap F_2),$$

weil $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{F}$ Filter sind. Weil $F = X \cap F$, ist $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{G} \to x$.

Umgekehrt sei $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, sodass $\mathcal{G} \to x$. Für $U \in \mathcal{U}(x)$ und $F \in \mathcal{F}$ gilt dann, weil $F \in \mathcal{G}$, dass $F \cap U \in \mathcal{G}$ und, da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, $F \cap U \neq \emptyset$. □

Satz 4.18. *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Dann gilt*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \mathcal{F}(\mathcal{F} \text{ Filter auf } X \wedge A \in \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \to x)$$

Beweis: Es sei $x \in \overline{A}$. Weil jede Umgebung von x A schneidet, ist

$$\mathcal{F} = \text{filter}_X(\{U \cap A | U \in \mathcal{U}(x)\})$$

ein Filter auf X und x ist Berührpunkt von $\mathcal{F}$. Nach Bemerkung 4.17 existiert ein Filter $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, der gegen x konvergiert. $A \in \mathcal{G}$ gilt immer noch.
Es sei $\mathcal{F}$ wie auf der rechten Seite. Weil $A \in F$ und $U \in \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, ist $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, also ist $x \in \overline{A}$. □

Satz 4.19. *Es sei $f\colon (X, \mathscr{O}) \to (Y, \mathscr{O}')$, und es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Es sei $f_*(\mathcal{F}) = \text{filter}_Y(\{f[F] : F \in \mathcal{F}\})$.* [1] *Es seien $(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathcal{O}_\mathcal{Y})$, $x \in X$, $f\colon X \to Y$. Dann gilt*

$$f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow \forall \mathcal{F}\,((\mathcal{F} \to_{\mathscr{O}} x) \to (f_*(\mathcal{F}) \to_{\mathscr{O}'} f(x))))$$

Beweis: Übungsaufgabe. □

[1] $f_*(\mathcal{F})$ heißt der push forward von $\mathcal{F}$ unter f.

Kapitel 5

Trennungseigenschaften

Definition 5.1. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum

T0 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T0-Raum*, wenn

$$(\forall x \neq y \in X)(\mathscr{U}(y) \neq \mathscr{U}(x)).$$

T1 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T1-Raum*, wenn

$$(\forall x \neq y \in X)(\exists U_x \in \mathcal{U}(x))(\exists U_y \in \mathcal{U}(y))(x \notin U_y \wedge y \notin U_x).$$

T2 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T2-Raum* (oder *Hausdorffraum*), wenn

$$(\forall x \neq y \in X)(\exists U_x \in \mathcal{U}(x))(\exists U_y \in \mathcal{U}(y))(U_x \cap U_y = \emptyset).$$

T3 Wir schreiben für eine Teilmenge $A \subseteq X$ in einem topologischen Raum $(X, \mathscr{O})$,

$$\mathcal{U}(A) = \{C : \exists B, (B \supseteq A, B \in \mathscr{O}, B \subseteq C)\}.$$

$(X, \mathscr{O})$ heißt *T3-Raum*, wenn

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\forall x \notin A)(\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}(x))(\exists U_A \in \mathcal{U}(A))(U_x \cap U_A = \emptyset),$$

wobei $\mathcal{A}$ das System der abgeschlossenen Mengen bezeichnet.

T3a $(X, \mathscr{O})$ heißt *T3a-Raum*, wenn

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\forall x \notin A)(\exists f \colon X \to [0,1]_{\mathbb{R}} \text{ stetig })(f(x) = 1, f[A] \subseteq \{0\}).$$

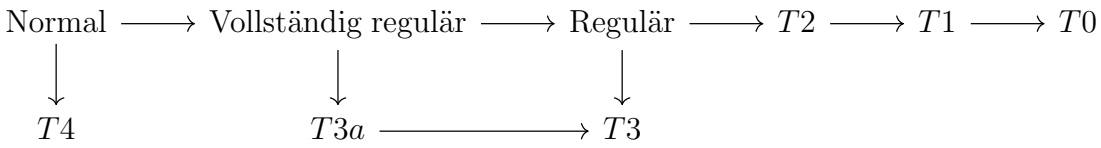
T3a-Räume werden auch $T3\frac{1}{2}$-Räume genannt.

T4 $(X, \mathscr{O})$ heißt *T4-Raum*, wenn

$$(\forall A, B \in \mathcal{A})(A \cap B = \emptyset \to (\exists U_A \in \mathcal{U}(A))(\exists U_B \in \mathcal{U}(B))(U_A \cap U_B = \emptyset)).$$

- $(X, \mathscr{O})$ heißt *regulär*, wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T1- und T3-Raum ist.
- $(X, \mathscr{O})$ heißt *vollständig regulär*, wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T1- und T3a-Raum ist.
- $(X, \mathscr{O})$ heißt *normal*, wenn $(X, \mathscr{O})$ ein T1- und T4-Raum ist.

Bemerkung 5.2. Es gelten folgende Implikationen:



Die Implikationen:

1. Normal impliziert vollständig regulär: Das wird im Lemma von Urysohn bewiesen.
2. Regulär impliziert T2: Unter T1 sind alle Einermengen abgeschlossen. Nach T3 besitzen $\{x\}$ und $\{y\}$ disjunkte Umgebungen.

Die Nichtimplikationen:

1. T3 alleine ist schwach und T4 alleine ist schwach, denn sogar ihre Konjunktion ist schwach: Es sei $|X| \geq 2$ mit der Topologie $\{\emptyset, X\}$. X hat T3 und T4 (und auch T3a), aber nicht T0.
2. T3a alleine impliziert nicht T0. Wir sind nun an einem Beispiel interessiert, in dem T3a nicht aus dem einfachen Grund gilt, dass es keine einzige Trennungsaufgabe gibt. Man nimmt zum Beispiel $X = \{0, 1, 2\}$ und $\mathscr{O} = \{\{0\}, \{1, 2\}, \emptyset, \{0, 1, 2\}\}$. (Dieses ist eine sogenannte *Partitionstopologie*: Man nimmt eine Partition $\mathcal{P}$ von X und erkärt diese zur Subbasis. Eine Teilmenge $\mathcal{P}$ der Potenzmenge von X ist eine *Partition von* X, wenn die Elemente von $\mathcal{P}$ alle nicht leer und paarweise disjunkt sind und als Vereinigung X ergeben.) Dann gibt es genügend stetige

Funktionen, die T3a bezeugen. Aber die Punkte 1 und 2 haben dieselbe Umgebungsbasis.

Die Partitionstopologie hat auch T4. Dies zeigt wiederum, dass T4 und T3a zusammen nicht T0 implizieren.

3. T0 impliziert nicht T1: Es sei $\mathbb{N}$ mit der Topologie ausgestattet, dass Endabschnitte (also Intervalle $[n, \infty)$) und $\emptyset$ offen sind. Dann hat $m > n$ eine Umgebung, die n nicht enthält, aber alle Umgebungen von n erhalten m.

4. T1 impliziert nicht T2: Es sei $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie ausgestattet. $\mathbb{N} \setminus \{x\}$ und $\mathbb{N} \setminus \{y\}$ bezeugen T1 für die Punkte x, y, aber zwei kofinite Mengen schneiden sich.

5. T4 impliziert nicht T3, und T4 impliziert nicht T0: Es sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$$\mathscr{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}.$$
Dann ist $\mathcal{A} = \{X, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5\}, \emptyset\}$ und es gibt keine abgeschlossenen, nichtleeren, disjunkten Mengen, also ist T4 trivialerweise erfüllt. Aber die abgeschlossene Menge $\{4, 5\}$ und der Punkt 3 haben keine disjunkten Umgebungen. Der Punkt 4 hat keine (offene) Umgebung, die die 3 nicht enthält. Die Punkte $4 \neq 5$ zeigen, dass T0 nicht gilt.

Wer nicht selber Beispiele aufstellen möchte, kann den Klassiker "Counterexamples in Topology" von Steen und Seebach konsultieren.

Satz 5.3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $(X, \mathscr{O})$ *ist ein* T1*-Raum.*
2. *Jede Einpunktmenge ist abgeschlossen.*
3. *Für alle* $A \subseteq X$ *ist* $A = \bigcap\{U | U \supseteq A, U \in \mathscr{O}\}$

Beweis:

1⇒2 Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T1-Raum. Es sei $y \neq x$. Nach T1 kann x von y getrennt werden. Für jedes $y \neq x$ können wir also ein $U_y \in \mathcal{U}(y)$ wählen, so dass $x \notin U_y$. Dann ist
$$\{x\} = \bigcap\{X \setminus U_y | y \in X \setminus \{x\}\}$$
und damit abgeschlossen.

2⇒3 Es sei $A \subseteq X$. Es gilt natürlich $A \subseteq \bigcap\{U | U \supseteq A, U \in \mathscr{O}\}$. Falls $x \notin A$, ist $U := X \setminus \{x\}$ offen und Obermenge von A, sodass $x \notin U$.

3⇒1 Es seien $x \neq y \in X$. Wir wenden das dritte auf $A := \{x\}$ an und erhalten eine Umgebung von x, die y nicht enthält.

□

Satz 5.4. *Äquivalent sind:*

1. *$(X, \mathscr{O})$ ist ein Hausdorff-Raum.*
2. *$\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen in der Produkttopologie.*
3. *Für $x \in X$ gilt $\{x\} = \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}(x)\}$.*
4. *Jeder konvergente Filter hat genau einen Berührungspunkt.*

Beweis: 1⇒2 Es sei $(x, y) \notin \Delta$, also ist $x \neq y$. Damit gibt es zwei disjunkte, offene Umgebungen U_x, U_y, sodass $x \in U_x, y \in U_y$. Dank Disjunktheit von U_x und U_y ist $\Delta \cap U_x \times U_y = \emptyset$. Also ist $\Delta = \overline{\Delta}$ und Δ ist abgeschlossen.

2⇒3 $\{x\} \subseteq \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}(x)\}$ ist klar. Es sei $y \notin \{x\}$, d.h. $y \neq x$. Dann ist $(x, y) \notin \Delta$, also gibt es $U_x \times U_y$ offen, sodass $(x, y) \in U_x \times U_y$ und $U_x \times U_y \cap \Delta = \emptyset$ (also sind U_x und U_y disjunkt). Dann ist $U_x \subseteq X \setminus U_y$, also ist $\overline{U_x} \subseteq X \setminus U_y$, also ist $y \notin \overline{U_x}$ und $y \notin \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}(x)\}$

3⇒4 Es sei $\mathcal{F}$ konvergent und x, sodass $\mathscr{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Dann ist

$$\bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \mathscr{U}\} = \{x\}$$

Es sei nun $y \neq x$. Weil $y \notin \bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$, gibt es ein $F \in \mathcal{F}$, sodass $y \notin \overline{F}$ und damit gibt es eine Umgebung U von y, sodass $U \cap F = \emptyset$. Also ist y nicht Berührungspunkt von $\mathcal{F}$.

4⇒1 Es sei $x \neq y$. $\mathscr{U}(x)$ konvergiert gegen x, also ist y nicht Berührungspunkt von $\mathscr{U}(x)$. Daher gibt es Umgebungen U_x, U_y von x und y, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$. Damit ist $(X, \mathscr{O})$ ein Hausdorff-Raum.

□

Bemerkung 5.5. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein vollständig regulärer Raum. Dann hat $\mathscr{O}$ eine Subbasis der Form

$$\{f^{-1}[U] \mid f\colon (X, \mathscr{O}) \to ([0,1], \mathscr{O}_<), f \text{ stetig}, U \subseteq [0,1] \text{ offen}\}.$$

Satz 5.6. *Jeder vollständig reguläre Raum kann in ein Produkt*

$$\prod_{f \in L} [0,1]_f$$

eingebettet werden, für eine geeignete Menge L, d.h. es gibt

$$e\colon (X, \mathscr{O}) \to ([0,1]^{|L|}, \mathscr{O}_\Pi),$$

das ein Homöomorphismus auf sein Bild ist (bezüglich der Spurtopologie).

Beweis: Es sei

$$L = \{f | f\colon X \to [0,1] \text{ stetig}\}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} e\colon X &\to \prod_{f \in L} [0,1] \\ x &\longmapsto (f(x))_{f \in L} \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass e alle geforderten Eigenschaften erfüllt:

- e ist injektiv: Es sei $x \neq y$. Nach T1 ist $A = \{y\}$ abgeschlossen und $x \notin A$. Nach T3a gibt es ein f, sodass $f(x) = 1, f[A] \subseteq \{0\}$. Also ist $f(y) = 0$ und $e(x)$ und $e(y)$ unterscheiden sich an der Stelle f.
- e ist stetig, da für alle f $p_f \circ e = f$ stetig ist.
- e ist bezüglich $\mathscr{O}$ und der Spur von $e[X]$ in $\left(\prod_{f \in L}[0,1], \mathscr{O}_\Pi\right)$ offen: Wir rechnen dies für die Subbasis-Urbilder (siehe Bemerkung 5.5) nach:

$$e\left[f^{-1}\left[\underbrace{B}_{\in \mathscr{O}_\mathbb{R}}\right]\right] = e\left[(p_f \circ e)^{-1}[B]\right] =$$
$$e[e^{-1}[\prod_{g \neq f, g \in L} [0,1] \times B] = (\prod_{g \neq f, g \in L} [0,1] \times B) \cap e[X].$$

□

Satz 5.7. *Jeder Unterraum eines T0,...,T3a-Raumes ist ein T0,...,T3a-Raum.*

Beweis: Geduldiges Nachrechnen. Bei T3a nutzt man auch die universelle Eigenschaft der Unterraumtopologie aus Satz 2.6.

Bemerkung 5.8. Der obige Satz gilt nicht für T4: Es sei $(X, \mathscr{O})$ die Sorgenfrey-Ebene aus Satz 5.11. Dieser Raum ist nicht normal, aber vollständig regulär und kann daher nach Satz 5.6 in ein Produkt $[0,1]^L$ eingebettet werden. Letzteres ist normal. Das Bild der Einbettung ist homömorph zur Sorgenfrey-Ebene. Das Bild der Einbettung ist also ein nicht normaler Unterraum.

Es gilt aber ein ähnlicher Satz für T4 unter stärkeren Voraussetzungen.

Satz 5.9. *Jeder abgeschlossene Unterraum eines T4-Raumes ist ein T4-Raum.*

Satz 5.10. *Es seien $X_i, i \in I$ nicht leere topologische Räume, $j = 0, 1, 2, 3, 3a$. $\prod_{i\in I} X_i$ ist ein Tj-Raum genau dann, wenn jedes X_i ein Tj-Raum ist.*

Beweis: $\Rightarrow$: Es sei $\prod_{k\in I} X_k$ ein Tj-Raum. Es sei i beliebig. Zu zeigen ist: X_i ist ein Tj-Raum. Es sei $x = \langle x_k\rangle_{k\in I} \in \prod_{k\in I} X_k$ (nach AC). Wir definieren

$$Y_k := \begin{cases} X_i & k = i \\ \{x_k\} & k \neq i \end{cases}$$

Nun ist

$$\prod_{k\in I} Y_k \cong X_i$$

durch den Homöomorphismus $\langle x_k\rangle_{k\in I} \longmapsto x_i$. Nach Satz 5.7 hat $\prod_{k\in I} Y_k$ die Tj-Eigenschaft und damit auch der homöomorphe Raum X_i (es ist klar, dass homömorphe Räume dieselben topologischen Eigenschaften haben).

Der Beweis der Umkehrrichtung besteht aus geduldigem Nachrechnen unter Ausnutzung der Eigenschaften der Produkttopologie, und für T3a nutzt man auch Satz 2.17. □

Satz 5.11. *Die Sorgenfreygerade $(\mathbb{R}, \mathscr{O})$, wobei $\mathscr{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ Basis von $\mathscr{O}$ ist, ist normal, da $\mathbb{R}$ vollständig ist, aber $(\mathbb{R}, \mathscr{O}) \times (\mathbb{R}, \mathscr{O})$ ist nicht normal.*

Beweis: Wir behaupten, dass $S = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ abgeschlossen und diskret ist. S ist sogar in der Standardtopologie abgeschlossen, also erst recht in der Sorgenfreytopologie. Es sei $(x, -x) \in S$. Dann ist für $\varepsilon > 0$ $[x, x + \varepsilon) \times [-x, -x + \varepsilon) \cap S = \{(x, -x)\}$. Also ist S diskret. Der Beweis folgt nun aus folgendem Lemma, da $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht in der Sorgenfrey-Ebene ist (siehe Definition 1.19) und $2^{|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|} = 2^{\omega} = |\mathbb{R}| = |S|$ ist. □

Lemma 5.12. *Es sei $(Y, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Es sei $S \subseteq Y$ abgeschlossen und diskret. Es sei D eine dichte Teilmenge von Y und sei $|S| \geq 2^{|D|}$. Dann ist $(Y, \mathscr{O})$ nicht normal.*

Beweis: Wir nehmen an, dass $(Y, \mathscr{O})$ normal ist und leiten einen Widerspruch her.

Jede Teilmenge $A \subseteq S$ ist abgeschlossen. Dies leitet man aus Lemma 2.4 her: $S \setminus A$ lässt ich als Vereinigung von U_y, $y \in S \setminus A$, schreiben. A ist also abgeschlossen in S. Da S abgeschlossen in Y ist, ist A auch abgeschlossen in Y. Auch die Teilmenge $S \smallsetminus A$ ist abgeschlossen.

Nun benutzen wir die Annahme. Es sei $A \subseteq S$. Dann kann man A und $S \setminus A$ offen trennen. Es sei $U_A \in \mathscr{U}(A)$ offen, $V_A \in \mathscr{U}(S \smallsetminus A)$ offen, sodass $U_A \cap V_A = \emptyset$. Wir wählen für jedes $A \subseteq S$ so ein Paar. Die Auswahlfunktion nennen wir

$$\begin{aligned} a \colon \mathcal{P}(S) &\to \mathscr{O} \times \mathscr{O} \\ A &\mapsto (U_A, V_A). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion

$$\begin{aligned} i \colon \mathcal{P}(S) &\to \mathcal{P}(D) \\ A &\mapsto U_A \cap D \end{aligned}$$

injektiv ist. Es sei $A \neq B \subseteq S$, o.B.d.A. $A \smallsetminus B \neq \emptyset$. Dann ist $U_A \cap V_B \supseteq A \cap (S \smallsetminus B) \neq \emptyset$, aber $U_B \cap V_B = \emptyset$. Also ist $U_A \not\subseteq U_B$ und damit $U_A \neq U_B$. Weil U_A, V_B und $U_A \cap V_B \supseteq A \cap (S \smallsetminus B) \neq \emptyset$ offen sind, ist $(U_A \cap V_B) \cap D \neq \emptyset$. Andererseits ist nach Wahl der Funktion a der Schnitt $V_B \cap U_B = \emptyset$. Also ist $U_A \cap V_B \cap D \neq U_B \cap V_B \cap D$. Dann ist $U_A \cap D \neq U_B \cap D$. Die Injektivität ist gezeigt.

Die injektive Funktion i bezeugt also $|\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)|$, in Kardinalzahlen $2^{|S|} \leq 2^{|D|}$. Nach dem Satz von Cantor ist $|S| < |\mathcal{P}(S)|$. Wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme $|S| \geq 2^{|D|}$. □

Satz 5.13. *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ sei eine Äquivalenzrelation und*

$$R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

Es sei $p\colon X \to {}^X/\!\sim, p(x) = [x]_\sim$. ${}^X/\!\sim$ trage die Quotiententopologie. Dann gilt:

1. *${}^X/\!\sim$ ist genau dann ein T1-Raum, wenn jede Äquivalenzklasse abgeschlossen ist.*
2. *Ist ${}^X/\!\sim$ Hausdorff'sch, so ist R (im Produktraum $X \times X$) abgeschlossen.*
3. *Wenn R abgeschlossen ist und p offen ist, so ist ${}^X/\!\sim$ Hausdorff'sch.*
4. *Ist X regulär und p offen und abgeschlossen, so ist ${}^X/\!\sim$ Hausdorff'sch.*
5. *Es sei X regulär, A abgeschlossen und $x \sim y :\Leftrightarrow x = y \vee x, y \in A$, d.h.*

$$[x]_\sim = \begin{cases} \{x\} & x \notin A \\ A & x \in A \end{cases}$$

   Dann ist ${}^X/\!\sim$ Hausdorff'sch.

6. *Es sei X T4 (normal), p abgeschlossen. Dann ist ${}^X/\!\sim$ T4 (normal).*

Beweis:

1. Übung.
2. Es gilt $R = (p \times p)^{-1}(\Delta)$, wobei Δ die Diagonale in ${}^X/\!\sim \times {}^X/\!\sim$ bezeichnet. Weil ${}^X/\!\sim$ Hausdorff'sch ist, ist Δ in ${}^X/\!\sim \times {}^X/\!\sim$ abgeschlossen und, weil p (und damit $p \times p$) stetig ist, ist R abgeschlossen.
3. Es sei $x \not\sim y$. Wir suchen $U \in \mathscr{U}_{X/\sim}([x]_\sim), V \in \mathscr{U}_{X/\sim}([y]_\sim)$, sodass $U \cap V = \emptyset$. Nach Voraussetzung ist $(x, y) \notin R$. In $X \times X$ gibt es ein Produkt $Z \times W$ aus offenen Mengen, sodass $(x, y) \in Z \times W$ und $Z \times W \cap R = \emptyset$.
   Es sei $U = p[Z], V = p[W]$. Dann sind U, V offen und $U \cap V = \emptyset$: Anderfalls, sei $[z] \in U \cap V$. Dann gibt es $a \in Z, b \in W$, sodass $p(a) = [z] = p(b)$. Also gilt $a \sim b$ und $(a, b) \in R \cap Z \times W$, ein Widerspruch.
   Also sind U, V disjunkte Umgebungen von $[x]_\sim$ und $[y]_\sim$.

4. Nach (3) genügt es, zu zeigen, dass R abgeschlossen ist. $\{[y]_\sim\}$ ist abgeschlossen, da $\{y\}$ wegen T1 abgeschlossen ist und p abgeschlossen ist. Da p stetig ist, ist $p^{-1}[\{[y]_\sim\}]$ abgeschlossen in X. Es sei $x \not\sim y$. Dann gilt $x \notin p^{-1}[[y]_\sim]$ und letzteres ist abgeschlossen. Nach T3 existieren disjunkte $U_x \in \mathscr{U}(x)$ und $U_y \in \mathscr{U}(p^{-1}[\{[y]_\sim\}])$. Die Menge $p[X \setminus U_y]$ ist abgeschlossen, also ist $W := (X/\sim) \setminus (p[X \setminus U_y])$ offen. Weiterhin ist $p(y) \in W$. Es gilt

$$p^{-1}[W] = p^{-1}[(X/\sim) \setminus (p[X \setminus U_y])] \subseteq X \setminus (X \setminus U_y) = U_y$$

Weiterhin gilt $U_x \cap p^{-1}[W] = \emptyset$ und $U_x \times p^{-1}[W]$ ist eine Umgebung von (x, y), die disjunkt zu R ist: Es sei $(z, k) \in U_x \times p^{-1}[W]$, sodass $z \sim k$. Dann ist $z \in p^{-1}[\{p(k)\}] \subseteq p^{-1}[W]$, im Widerspruch dazu, dass beide Mengen disjunkt sind. Insgesamt ist R abgeschlossen.

5. Es sei $[x]_\sim \neq [y]_\sim$.

   - 1.Fall: $x \in A, y \notin A$. Nach Regularität von X gibt es eine offene Umgebung U von A und eine offene Umgebung V von y, sodass $U \cap V = \emptyset$. $p[V]$ ist eine offene Umgebung von $p[A] = [x]_\sim$ und $p[U]$ eine offene Umgebung von $[y]_\sim$: Da $V \cap A = \emptyset$, ist $p^{-1}[p[V]] = V$, was offen ist und, da $U \supseteq A$, ist $p^{-1}[p[U]] = (U \setminus A) \cup A = U$, was ebenfalls offen ist. Weil $U \cap V = \emptyset$, ist $p[U] \cap p[V] = \emptyset$.
   - 2.Fall: $x \notin A, y \notin A$. Klar.

6. Übung.

□

Satz 5.14. *Es seien $g, f\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{Y})$ stetig, Y sei ein Hausdorff-Raum. Dann gilt*

1. *$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.*
2. *Falls $D \subseteq X$ dicht ist (d.h. $\overline{D} = X$) und $f|_D = g|_D$, dann ist $g = f$.*
3. *$\{(x, y) \mid f(x) = y\} \subseteq X \times Y$ ist abgeschlossen.*
4. *Falls f injektiv ist, so ist X ein Hausdorff-Raum.*

Beweis: 1. Die Funktion $(f,g)\colon X\times X \to Y\times Y, (f,g)(x_1,x_2) = (f(x_1),g(x_2))$ ist stetig nach Satz 2.17. Weil Y ein Hausdorff-Raum ist, ist, ist $\Delta \subseteq Y \times Y$ abgeschlossen. Damit ist auch $(f,g)^{-1}[\Delta] = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.

2. Es sei D dicht. Nach Voraussetzung ist $D \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} =: \Delta'$. Da Δ' abgeschlossen ist, ist

$$X = \overline{D} \subseteq \Delta'$$

und damit $X = \Delta'$.

3. Die Funktion $(f,id)\colon X \times Y \to Y \times Y$ ist stetig nach Satz 2.17. Also ist

$$(f,\mathrm{id})^{-1}[\Delta] = \{(x,y) \mid f(x) = id(y)\} = \{(x,y) \mid f(x) = y\}$$

abgeschlossen.

4. Weil f injektiv ist, ist f^{-1} eine Funktion $f[X] \to X$. Insbesondere ist f^{-1} injektiv, da f eine Funktion ist. Es sei $x \neq y \in X$. damit ist $f(x) \neq f(y) \in Y$, und nach Hausdorff-Eigenschaft von Y gibt es $U, V \in \mathscr{O}_Y$, sodass $f(x) \in U, f(y) \in V, U \cap V = \emptyset$. Nach Stetigkeit von f sind $f^{-1}[U], f^{-1}[V]$ offene Umgebungen von x und y, die aufgrund der Injektivität von f^{-1} disjunkt sind. Da x und y beliebig waren, ist X Hausdorff.

□

Da wir Funktionen durch Bildung eines Quotienten ("modding out") injektiv machen können, erhalten wir das folgende Korollar:

Korollar 5.15. *Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, Y sei Hausdorff. Es sei $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Dann ist ${}^X/_\sim$ ein Hausdorff-Raum.*

Beweis: Die Funktion $\overline{f}\colon {}^X/_\sim \to Y$, definiert durch $\overline{f}([x]_\sim) = f(x)$ (Wohldefiniertheit folgt aus der Definition der Äquivalenzrelation), injektiv und stetig nach Satz 2.23, da $\overline{f} \circ p = f$ stetig ist. Nach Satz 5.14 Teil 4 ist ${}^X/_\sim$ ein Hausdorff-Raum. □

Die Eigenschaften T1 und T2 haben nach Satz 5.3 und Satz 5.4 äquivalente Charakterisierungen. Nun fahren wir in dieser Serie für T3 und T4 fort.

Lemma 5.16 (Charakterisierung durch Schichtungen)**.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.*

(1) Dann ist X T3 genau dann, wenn

$$\forall x \in X, \forall U \in \mathscr{U}(x), \exists \text{ abg } A, x \subseteq A \subseteq U.$$

(2) X ist T4 genau dann wenn

$$\forall U \in \mathscr{O}, \forall \text{ abg. } C \subseteq U, \exists \text{ offenes } O, C \subseteq O \subseteq \bar{O} \subseteq U.$$

Beweis: (1) Zuerst sei X T3 und $x \in X$, $U \in \mathscr{U}(x)$, U offen. Insbesondere ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen und $x \notin A$. Es gibt also eine Umgebung V_x von x und eine Umgebung V_A von A, sodass $V_x \cap V_A = \emptyset$. Also ist $X \setminus V_A$ abgeschlossen, $x \in X \setminus V_A$ und $(X \setminus V_A) \subseteq U$, denn $V_A \supseteq (X \setminus U)$.

Nun sei es der Fall, dass die abgeschlossenen Mengen eine Umgebungsbasis bilden. Es sei A abgeschlossen und $x \notin A$. Es gibt also eine abgeschlossene Umgebung A_x von x, die disjunkt zu A ist, und $U_x \subseteq A_x$ offen mit $x \in U_x$. Demnach ist $A \subseteq (X \setminus A_x)$, $X \setminus A_x$ offen und $(X \setminus A_x) \cap U_x = \emptyset$.

(2) Es gelte T4 und es sei $C \subseteq U$, C abgeschlossen, U offen. Dann ist $C \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Wir trennen mit T4 die Menge C von $X \setminus U$: Wir erhalten ein offenes $O \supseteq C$ und ein offenes $O' \supseteq X \setminus U$ mit $O \cap O' = \emptyset$. Dann bezeugt die offene Menge O', dass $\bar{O} \subseteq U$.

Umgekehrt seien zwei disjunkte abgeschlossene Mengen C, D gegeben. Dann ist $C \subseteq X \setminus D$ und letzteres ist offen. Wir finden also ein offenen U mit $C \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq X \setminus D$. Dann trennen die offenen Mengen U und $X \setminus \bar{U}$ die Mengen C und D. □

Aus Teil 1 erhalten wir:

Satz 5.17. *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist X T3 genau dann, wenn die abgeschlossenen Mengen eine Umgebungsbasis bilden.*

Teil 2 des Schichtungslemmas wird im nächsten Kapitel genutzt.

Satz 5.18 (Über die stetige Fortsetzung einer stetigen Funktion)**.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum, $D \subseteq X$ dicht. $f \colon D \to Y$ sei stetig (in der Spurtopologie) und Y sei regulär. Dann sind äquivalent:*

1. $\exists F : X \to Y$, F stetig, $F \supseteq f$

2. $\forall x \in X$ *ist* $f_*(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\})$ *ein konvergenter Filter.*

Beweis:

- (1)⇒(2). Wir nutzen Satz 4.19: F ist stetig in x gdw für jeden Filter $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F} \to x$, so $F_*(\mathcal{F}) \to F(x)$.

  Es sei $x \in X$. Wir nehmen $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$. Dies ist ein konvergenter Filter. Das F stetig ist, is, konvergiert $F_*(\{U \mid U \in \mathscr{U}(x)\})$ gegen $F(x)$. Es ist also $\mathcal{U}(F(x))$ Teilmenge von $F_*(\{U \mid U \in \mathscr{U}(x)\})$ und somit, da Filter gegen Obermengen abgeschlossen sind, auch von

  $$F_*(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\}) = f_*(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\})\}.$$

- (2)⇒(1). Wir setzen $\mathcal{F} := f_*(\{U \cap D \mid U \in \mathscr{U}(x)\})$ (also der push-forward), $F(x) = \lim(\mathcal{F})$ und zeigen, dass F eine Funktion ist, $F \supseteq f$ sowie Stetigkeit in jedem Punkt.
  F ist eine Funktion, denn in Hausdorff-Räumen (also insbesondere in regulären Räumen) sind Grenzwerte von Filtern (falls sie existieren) eindeutig:
  Es sei x ein Grenzwert von $\mathcal{F}$ und $y \in Y$. Es gibt disjunkte Umgebungen U_x, U_y von x und y. Weil $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert, ist $U_x \in \mathcal{F}$ und, da $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ist $U_y \notin \mathcal{F}$. Also konvergiert $\mathcal{F}$ nicht gegen y.
  Es sei $x \in D$ und $V \in \mathscr{U}(f(x))$. Weil f stetig ist, ist f insbesondere in x stetig, also ist $f^{-1}[V] \in \mathscr{U}(x)$ (in der Spurtopologie). Also ist $f^{-1}[V] = U \cap D$ mit $U \in \mathscr{U}(x)$. Also ist $V \in \mathcal{F}$ und $f(x)$ ist der Grenzwert von $\mathcal{F}$.
  Es sei $x \in X$ beliebig und $V \in \mathscr{U}(F(x))$. Weil die abgeschlossenen Mengen in regulären Räumen eine Umgebungsbasis bilden, können wir annehmen, dass V abgeschlossen ist. Weil $\mathcal{F}$ gegen $F(x)$ konvergiert, ist $V \in \mathcal{F}$ und nach Definition $f^{-1}[V] = U \cap D$ mit $U \in \mathscr{U}(x)$. Weil f in der Spurtopologie stetig ist, ist $f^{-1}[V]$ abgeschlossen.
  Wir behaupten, dass $F^{-1}[V] \supseteq U$ ist. Sonst gibt es $x \in U, x \notin F^{-1}[V]$. Dank der Abgeschlossenheit von $f^{-1}[V]$ gibt es mit T3 eine offene Menge $U_x \ni x$, sodass $U \supseteq U_x$ und $U_x \cap f^{-1}[V] = \emptyset$. Da U_x offen ist, ist $D \cap U_x \neq \emptyset$. Es sei $y \in D \cap U_x$. Dann ist $f(y) \in V$ und, da $F \supseteq f$, auch $F(y) \in V$ und somit $y \in F^{-1}[V]$, ein Widerspruch.
  Da $F^{-1}[V] \supseteq U$, ist $F^{-1}[V] \in \mathscr{U}(x)$ und somit ist F in x stetig.

□

Kapitel 6

Normale und T4-Räume

Satz 6.1 (Das Lemma von Urysohn, 1925)**.** *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum, A, B abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es eine stetige Funktion*

$$f\colon (X, \mathscr{O}) \to ([0,1], \mathscr{O}_<),$$

sodass $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$. Falls es für je zwei abgeschlossene disjunkte A, B so ein stetiges f gibt, ist $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum.

Beweis: Es sei C abgeschlossen, O offen und $C \subseteq O$. Dann gibt es nach dem Schichtungslemma 5.16 eine Menge $O_1 \in \mathscr{O}$, sodass

$$C \subseteq O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq O$$

Nun seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Damit ist $A \subseteq B^c$ mit B^c offen. Wir definieren induktiv über k für jede dyadische Zahl, d.h. $x = \frac{p}{2^k}, 0 \leq p \leq 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Menge U_x, sodass

$$x < x' \longrightarrow U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U_{x'}$$

$k = 0$: Es seien U_0, U_1, sodass

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq B^c$$

Indem wir die Vorüberlegung zweimal anwenden.
Es seien alle Mengen für $\frac{p}{2^k}$ definiert. Es sei $x = \frac{p}{2^{k+1}}$, p ungerade. Dann sei $d_1 = \frac{p-1}{2^{k+1}}, d_2 = \frac{p+1}{2^{k+1}}$. Weil $p-1$ und $p+1$ gerade sind, sind für d_1 und d_2 schon Mengen definiert. Nun sei

$$\overline{U_{d_1}} \subseteq U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U_{d_2}.$$

Indem wir wieder die Vorüberlegung anwenden. Es ist klar, dass die neuen Mengen die Bedingung erfüllen.
Nun sei für jede dyadische Zahl eine Menge definiert. Für eine beliebige Zahl r sei

$$U_r := \bigcup \{U_d \mid d \leq r, d \text{ dyadisch}\}$$

Nun gilt immer noch für $r, r' \in [0,1]$:

$$r < r' \to \overline{U_r} \subseteq U_{r'}. \tag{6.1}$$

Dies folgt, da wir aufgrund der Dichtheit der dyadischen Zahlen in $\mathbb{R}$ ein d finden, sodass $r < d < d' < r'$. Dann folgt

$$U_r \subseteq U_d \Rightarrow \overline{U_r} \subseteq \overline{U_d} \subseteq U_{d'} \subseteq U_{r'}.$$

Nun können wir f definieren: Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\}, & \text{falls } \exists r \in [0,1]\, x \in U_r \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Natürlich gilt $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$. Weiterhin ist f stetig, denn für beliebige $a, b \in [0,1]$ gilt

$$f^{-1}((a,b)) \stackrel{!}{=} (\bigcup_{c<b} U_c) \cap \bigcup_{d>a} (\overline{U_d}^c) = (\bigcup_{c<b} U_c) \setminus \bigcap_{d>a} (\overline{U_d}) := C \setminus D.$$

Wir zeigen, dass $f^{-1}((a,b))$ eine Teilmenge der rechten Seite ist. Falls $d = f(x)$, so ist $x \in U_{d'}$ für alle $d' > d$ und $x \notin U'_d$ für alle $d' < d$. Also gibt es $d < b$, sodass $x \in U_d$. $f(x) > a$ impliziert, dass es ein $d > a$ gibt, so dass $x \notin U_d$. Wir können nun $d' = d - \frac{d-a}{2} > a$ und die Implikation (6.1) nehmen, und erhalten ein $d' > a$ mit $x \notin \bar{U}_{d'}$. Damit ist $x \in C \setminus D$.
Nun zur umgekehrten Inklusion: Falls $x \in C \setminus D$, so gibt es $c < b$, dass $x \in U_c$. Damit ist $f(x) < b$. Weil $x \notin D$, so gibt $d > a$, sodass $x \notin U_d$. Damit ist $f(x) > a$.
Weiterhin ist $C \setminus D$ als Differenz einer offenen und einer abgeschlossenen Menge offen.

Zur Umkehrung kann man $f^{-1}[[0, \frac{1}{4})]$ uns $f^{-1}[(\frac{3}{4}, 1]]$ nehmen, um A und B zu trennen. □

Korollar 6.2. *Jeder normale Raum ist ein regulärer Raum.*

Beweis: Es sei A abgeschlossen und $x \notin A$. Nach T1 ist $\{x\}$ abgeschlossen und nach dem Lemma von Urysohn gibt es ein stetiges f, sodass $f[A] = \{1\}$ und $f(x) = 0$. Also erfüllt der Raum das T3a-Axiom. □

Definition 6.3. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *G_δ-Menge*, falls es $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{O}$ gibt, sodass $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. $A \subseteq X$ heißt F_σ-Menge, falls $X \setminus A$ eine G_δ-Menge ist.

Satz 6.4. *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein T4-Raum. $A \neq \emptyset$ sei abgeschlossen. Dann sind äquivalent:*

1. *A ist eine G_δ-Menge.*
2. *Es gibt eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$, sodass $f^{-1}[\{0\}] = A$.*

Beweis:

- (1)$\Longrightarrow$(2) Wir schreiben $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A_n offen und o.B.d.A. absteigend. Es sei $B_n = X \setminus A_n$. B_n ist abgeschlossen und $A \cap B_n = \emptyset$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon X \to [0,1]$, sodass $f_n[A] = \{0\}, f[B_n] = \{1\}$. Nun sei

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n$$

  $f(x)$ ist stetig, da die Summe gleichmäßig gegen f konvergiert und endliche Summen stetiger Funktionen stetig sind. Nun gilt $f^{-1}[\{0\}] = A$, denn, falls $f(x) = 0$, so ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $x \notin B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$.

- (2)$\Longrightarrow$(1). Es gilt $A = f^{-1}[\{0\}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left(\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)\right)$.

□

Satz 6.5 (Zwei Verschärfungen des Urysohn-Lemmas)**.** *Es sei X ein T4-Raum. Es seien A, B abgeschlossene Mengen, $A \cap B = \emptyset$.*

1. *Es sei $A \neq \emptyset$ eine G_δ-Menge. Dann gibt es eine stetige Funktion $h\colon X \to [0,1]$, sodass $h^{-1}[\{0\}] = A$ und $h^{-1}[\{1\}] \supseteq B$.*
2. *Es seien $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ G_δ-Mengen. Dann gibt es eine stetige Funktion $e\colon X \to [0,1]$, sodass $e^{-1}[\{0\}] = A, e^{-1}[\{1\}] = B$.*

Beweis:

1. Wir nehmen g wie aus Satz 6.4, d.h. $g\colon X \to [0,1]$ stetig, $f^{-1}[\{0\}] = A$. Dann nehmen wir f wie aus Satz 6.1, d.h. $f\colon X \to [0,1]$, $f[A] = \{0\}, f[B] = \{1\}$. Nun ist $h := \max(f, g)$ wie gewünscht.

2. Wir modifizieren 1. es sei h wie ein 1. Durch Ersetzen von h durch $1 - h$ und erhalten eine stetige Funktion $k\colon X \to [0,1]$ mit $k^{-1}[\{1\}] = B, k^{-1}[\{0\}] \supseteq A$. Es sei f wie in Satz 6.1. Dann erfüllt

$$e := \frac{1}{2}\min(k, \max(h, f))$$

die Bedingung.

□

Lemma 6.6. *Es sei A abgeschlossen, $A \subseteq X$, wobei $(X, \mathcal{O})$ ein T4-Raum ist. Es sei $f\colon A \to [-1,1]$ stetig. Dann gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle n:*

1. *$g_n\colon X \to [-1,1]$ ist stetig.*
2. *$\forall x \in X, \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq g_n(x) \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.*
3. *$\forall x \in A, |f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.*
4. *$\forall x \in X, |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.*
5. *$\forall p \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq p, |g_m(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p$*

Beweis: Wir zeigen die Existenz induktiv über n.

- Anfang: Es sei $g_0 \equiv 0$. g_0 erfüllt alle Bedingungen.
- Induktionsschritt: Es sei g_n definiert. Dann sind

$$B_{n+1} := \left\{x \in A \mid f(x) - g_n(x) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$C_{n+1} := \left\{x \in A \mid f(x) - g_n(x) \leq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

abgeschlossen und disjunkt. Nach Satz 6.1 gibt es eine stetige Funktion

$$v_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

sodass

$$v_n[B_{n+1}] = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}, v_n[C_{n+1}] = \left\{\frac{-1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

Setze nun $g_{n+1} = g_n + v_n$. Nun prüfen wir, ob g_{n+1} die Eigenschaften (1) bis (4) hat:

1. ist klar, da g_n und v_n stetig sind.
2. Ist ebenfalls per Definition von g_n klar.
3. Falls $x \in B_{n+1} \cup C_{n+1}$, so folgt

$$|f(x) - g_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$

   da v_n die Abschätzung $|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ aus der Induktionsvoraussetzung um $\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ verbessert.
   Falls $x \notin (B_{n+1} \cup C_{n+1})$, so folgt

$$|f(x) - g_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

   aus den Definitionen von B_{n+1} und C_{n+1} und der Tatsache, dass v_n die Fallvoraussetzung $|f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ um höchstens $\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n$ verschlechtern kann.
4. Klar, da

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| = |v_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

5. Schließlich erhalten wir auch den Punkt 5, durch Aufsummierung der geometrischen Reihe.

□

Das Lemma funktioniert auch mit dem Zielraum $(-1, 1)$ statt $[-1, 1]$.

Lemma 6.7. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein T4-Raum, und es seien A eine abgeschlossenen Teilmenge und f eine in der Spurtopologie stetige Funktion $f\colon A \to [-1,1]$. Dann hat f eine stetige Fortsetzung auf X.*

Beweis: Es sei X T4. Es seien g_n wie in Lemma 6.6. Dann ist $F(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ eine stetige Funktion, da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X gleichmäßig konvergiert. Nach Eigenschaft 3 im Lemma 6.6 ist $F(x) = f(x)$. □

Satz 6.8 (Fortsetzungssatz von Tietze, 1915)**.** *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{O})$ ein T4-Raum genau dann wenn folgendes gilt: Für jede abgeschlossenen Teilmenge A und hat jede auf A in der Spurtopologie stetige Funktion $f\colon A \to (-1,1)$ eine stetige Fortsetzung auf X.*

Beweis: Es sei f wie in Lemma 6.7. Dann ist $\tilde{f} = \frac{2}{\pi}\arctan \circ f$ eine stetige Funktion von A nach $(-1,1)$. Nach Lemma 6.7 gibt es $\tilde{F}\colon X \to (-1,1)$ stetig. Nun ist $F := \tan\circ(\frac{\pi}{2}\tilde{F})$ eine Fortsetzung von f.

Nun zur Umkehrung: Es seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Wir fassen f als Funktion in $[0,1]$ auf. Dann ist f stetig bzgl. der Spurtopologie auf $A \cup B$, da in dieser $A = X \cap (X \setminus B), B = X \cap (X \setminus A)$ offen sind. Nach Voraussetzung lässt sich f zu einer stetigen Funktion F auf X fortsetzen. Da $[0, \frac{1}{2}$ und $(\frac{2}{3}, 1]$ beide offene Teilmengen von $[0,1]$ sind, sind $F^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ und $F^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]]$ offen. Die beiden sind disjunkt. Da F eine Fortsetzung von f ist, ist $F^{-1}[[0, \frac{1}{2})] \supseteq A$ und $F^{-1}[(\frac{2}{3}, 1]] \supseteq B$, haben wir also eine offene Trennung. □

Kapitel 7

Kompaktheit

Definition 7.1. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathscr{O})$ heißt *kompakt*, wenn X nicht leer ist und

$$\forall \mathscr{U} \subseteq \mathscr{O} \left(\bigcup \mathscr{U} = X \to \exists \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}, |\mathscr{U}_0| \in \omega \wedge \bigcup \mathscr{U}_0 = X \right)$$

Definition 7.2. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathscr{O})$ heißt Bourbaki-kompakt, wenn $(X, \mathscr{O})$ kompakt und Hausdorff'sch ist.

Satz 7.3. *Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein nicht leerer topologischer Raum. Äquivalent sind:*

1. *X ist kompakt.*
2. *Es sei $\mathscr{A}$ das System der abgeschlossenen Mengen.*

   $$\forall \mathscr{L} \subseteq \mathscr{A} (\left(\bigcap \mathscr{L} = \emptyset \to \exists \mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}, |\mathscr{L}_0| \in \omega \wedge \bigcap \mathscr{L}_0 = \emptyset \right).$$

   Man kann auch

   $$\forall \mathscr{L} \subseteq \mathscr{A} \left(\forall \mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}, (|\mathscr{L}_0| \in \omega \to \bigcap \mathscr{L}_0 \neq \emptyset) \to \bigcap \mathscr{L} \neq \emptyset \right)$$

   schreiben.
3. *Jeder Filter auf X hat einen Berührungspunkt.*
4. *Jeder Ultrafilter ist konvergent.*

Beweis:

- Es sei $\bigcap \mathscr{L} = \emptyset$. Dann ist

$$\bigcup \underbrace{\{X \setminus B \mid B \in \mathscr{L}\}}_{=:\mathscr{U}} = X$$

  Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathscr{U}_0$. Dann ist

$$\bigcap \underbrace{\{X \setminus B \mid B \in \mathscr{U}_0\}}_{\subseteq \mathscr{L}} = \emptyset$$

- Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Falls F keinen Berührpunkt hat, gibt es für alle $x \in X$ ein $F \in \mathcal{F}$, sodass $x \notin \overline{F}$. Damit ist

$$\bigcap \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$$

  Also gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, sodass $\mathcal{F}_0$ endlich und $\bigcap \mathcal{F}_0 \subseteq \bigcap \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}_0\} = \emptyset$. Aber Filter sind bezüglich endlichen Schnitten abgeschlossen und $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ein Widerspruch.

- Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Nach (3) hat $\mathcal{U}$ einen Berührpunkt. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, konvergiert $\mathcal{U}$ gegen x, denn für $U \in \mathscr{U}(x)$ gilt $X \setminus U \notin \mathcal{U}$ (da x ein Berührpunkt ist) und somit $U \in \mathcal{U}$.

- Es sei $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung. Wenn $\mathscr{U}$ keine offene Teilüberdeckung hat, dann ist

$$\mathcal{E} = \{X \setminus \bigcup \mathcal{U}_0 \mid |\mathscr{U}_0| \in \omega, \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}\}$$

  Basis eines Filters $\mathcal{F}$. Nach dem Ultrafilter-Lemma ist dieser Filter in einem Ultrafilter $\mathcal{F}_{\max}$ enthalten. Dieses $\mathcal{F}_{\max}$ wäre dann aber nicht konvergent: Es sei $x \in X$. Dann gibt es $U \in \mathscr{U}$, s.d. $x \in U$. Weiterhin ist $U \notin \mathcal{F}_{\max}$, denn $X \setminus U \in \mathcal{E}$ (mit dem Zeugen $\mathscr{U}_0 = \{U\}$) und damit $\mathscr{U}(x) \not\subseteq \mathcal{F}_{\max}$.

□

Definition 7.4. Das Axiom PI (prime ideal), das sagt "jeder Filter lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern"

1965 gelang Halpern und Lévy [3] der Bau eines Modells von ZF, in dem PI gilt, aber AC falsch ist. Dieses Modell basiert auf einem enorm starken Ramseytheorem, dem Satz von Halpern und Läuchli [2].

Satz 7.5 (Satz von Alexander, ZF+PI)**.** *Es sei $\mathscr{S}$ eine Subbasis von $(X, \mathscr{O})$. Dann ist X kompakt, wenn jede Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat.*

Beweis: Annahme: X ist nicht kompakt. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X, der nicht konvergiert:

$$\forall x \in X, \exists U_x \in \mathscr{U}(x), (X \setminus U_x) \in \mathcal{F}.$$

Nach der Definition einer Subbasis hat jedes U_x eine Teilmenge der Form $\bigcap_{k\leq n} U_{k,x}$ mit $U_{k,x} \in \mathscr{S}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es ist $X \setminus U_x \subseteq X \setminus \bigcap_{k\leq n} U_{k,x} = \bigcup_{k\leq n}(X \setminus U_{k,x}) \in \mathcal{F}$. Dann ist für ein $U_{k,x}$ schon $X \setminus U_{k,x} \in \mathcal{F}$, da der Filter $\mathcal{F}$ ultra ist. Somit erhalten wir (nach Umbenennen von $U_{k,x}$ zu U_x):

$$\forall x \in X, \exists U_x \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{S}, (X \setminus U_x) \in \mathcal{F}.$$

[Anmerkung über die benutzten Axiome: Wenn man diese Passage hier ohne das Auswahlaxiom durchführen möchte, muss man alle Beispiele U_x mittragen, also für jedes x womöglich viele Mengen. Man braucht die U_x nicht auszuwählen, man kann einfach alle nehmen, und von jedem einzelnen geht man zu allen seinen Subbasis-Repräsentanten über. Die Wahl des $k \leq n$ übernimmt dann der Filter. Dann hat man eine riesige Überdeckung von X mit Elementen aus $\mathscr{S}$.] Weil $\bigcup\{U_x \mid x \in X\} = X$, existiert nach der Voraussetzung über Überdeckungen aus Elementen von $\mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup\{U_x \mid x \in X_0\}$. Dann ist nach De Morgan:

$$\bigcap_{x\in X_0} (X \setminus U_x) = X \setminus \bigcup_{x\in X_0} U_x = \emptyset \in \mathcal{F}.$$

Also ist $\mathcal{F}$ kein Filter. Unsere Annahme führt also in einen Widerspruch. □

Lemma 7.6. *Es seien X ein Hausdorff-Raum und K eine kompakte Teilmenge von X. Es sei $x \in X \setminus K$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und V von K, s.d. $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis: Es gilt $\forall k \in K, x \neq k$. Nach Hausdorff-Eigenschaft gibt es U_k, V_k, $x \in U_k$, $k \in V_k$ mit $U_k \cap V_k = \emptyset$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $k_0,\ldots,k_n$, sodass $K \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} V_{k_j}$. Es sei $U = \bigcap_{j=0}^{n} U_{k_j}$, $V = \bigcup_{j=0}^{n} V_{k_j}$. Dann ist

$$U \cap V = \left(\bigcap_{j=0}^{n} U_{k_j}\right) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} V_{k_i}\right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} (U_{k_j} \cap V_{k_j}) = \emptyset$$

□

Satz 7.7. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein kompakter Raum.*

1. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.*
2. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.*

Beweis: 1. Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von A. Dann ist $\mathscr{U} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von K. Diese hat eine endliche Teilüberdeckung $\mathscr{U}_0 \cup \{X \setminus A\}$. Dann ist $\mathscr{U}_0$ eine offene Überdeckung von A.

2. Es seien $K \subseteq X$ kompakt und $x \notin K$. Nach Lemma 7.6 gibt es eine offene Umgebung U_x von x, sodass $U_x \cap K = \emptyset$. Also ist $x \notin \overline{K}$. Da dies für alle $x \notin K$ gilt, ist $\overline{K} = K$.

□

Satz 7.8. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ kompakt und Hausdorff. Es seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es offene Mengen U, V, sodass $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$.*

Beweis: Wir wenden Lemma 7.6 zweimal an: Für $x \in B$ seien U_x, V_x, sodass $A \subseteq U_x, x \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$. Die Mengen $\{V_x \mid x \in B\}$ überdecken B, enthalten also eine endliche Teilüberdeckung. Mit $U = \bigcap_{x \in B_0} U_x, V = \bigcup_{x \in B_0} V_x$ gilt dann $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$. □

Satz 7.9. *Es sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f[X]$ kompakt.*

Beweis: Es sei $\mathscr{V}$ eine offene Überdeckung von $f[X]$. Dann ist

$$\mathscr{U} := \{f^{-1}[V] \mid V \in \mathscr{V}\}$$

eine offene Überdeckung von X. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$\mathscr{U}_0 = \{f^{-1}[V] \mid V \in \mathscr{V}_0\}$$

Also ist $\mathscr{V}_0$ eine endliche Teilüberdeckung von $f[X]$. □

Satz 7.10. *Es sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig und Y ein Hausdorff-Raum. Dann ist f abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nach Satz 7.7 ist A kompakt, also ist $f[A]$ kompakt (nach Satz 7.9). Somit ist $f[A]$ abgeschlossen (erneut nach Satz 7.7). □

Satz 7.11. *Es sei X kompakt, Y Hausdorff, $f\colon X \to Y$ stetig und injektiv. Dann ist f eine Einbettung.*

Beweis: f ist abgeschlossen nach Satz 7.10. Da $f\colon X \to f[X]$ injektiv ist, ist f damit auch offen (da $f[X \setminus A] = f[X] \setminus f[A]$). Also ist $f\colon X \to f[X]$ stetig, offen und abgeschlossen, sowie bijektiv. Damit ist f eine Einbettung. □

Satz 7.12 (Tychonoff, 1930)**.** *Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)_{i\in I\neq\emptyset}$ topologische Räume. Dann gilt:*

1. *(ZFC) Wenn alle X_i kompakt sind, dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt.*
2. *(ZF) Wenn $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt und nicht leer ist, so ist jedes X_i kompakt.*
3. *(ZF + PI) Wenn alle X_i kompakt und Hausdorff sind, dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt und Hausdorff.*

Beweis: Wir haben die Axiome, die im Beweis benutzt werden, jeweils in Klammern geschrieben.

1. Falls es ein $i \in I$ gibt, sodass $X_i = \emptyset$, dann ist $\prod X_i = \emptyset$ und somit kompakt.
   Es sei $\prod X_i \neq \emptyset$ und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X. Dann ist

   $$p_i(\mathcal{U}) = \{A \subseteq X_i \mid p_i^{-1}[A] \in \mathcal{U}\}$$

   ein Ultrafilter.[1] Da X_i kompakt ist, konvergiert $p_i[\mathcal{U}]$ gegen ein $x_i \in X_i$ (dieses ist eindeutig, falls X_i Hausdorff ist). Wir haben also

   $$\mathcal{U}_{X_i}(x_i) \subseteq p_i[\mathcal{U}].$$

   Mit AC nehmen wir ein x so dass $x = (x_i)_{i\in I}$. (Falls alle Räume X_i Hausdorff'sch sind, wird hier das Auswahlaxiom nicht gebraucht. Das Axiom PI (prime ideal), das sagt "jeder Filter lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern" genügt.) Wir zeigen $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U}$:
   Nach dem Satz von Alexander genügt es, sich auf eine Subbasis zu beschränken. Es sei $U \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{S}$. Dann ist für ein $i \in I$, $U = U_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j = p_i^{-1}[U_i] \in \mathcal{U}$.

[1] In der Algebra schreibt man statt $p_i(\mathcal{U})$ lieber $(p_i)_*\mathscr{U}$ und sieht dieses Verwendung von p_i als push forward von p_i.

2. Weil p_i stetig und $\prod_{i\in I} X_i$ nichtleer und kompakt ist, ist $p_i[X] = X_i$ kompakt.

3. $T2$ vererbt sich auf Produkte. Wenn Limiten von Ultrafiltern eideutig sind, dann bestimmen die Ultrafilter $p_i(\mathscr{U})$ schon die x_i. ZF + PI genügt für den Beweis.

□

Satz 7.13 (Heine-Borel)**.** *Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis: Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Weil $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum die Hausdorff-Eigenschaft hat, ist K abgeschlossen. Weiterhin ist

$$K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B(0,n)$$

Also hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, $\{B(0,n_i), i \leq k\}$. Dann ist $K \subseteq B(0,n)$ mit $n = \max(n_1, ..., n_k)$.
Die Rückrichtung wird in der Analysis bewiesen. □

Kapitel 8

Satz von Stone-Weierstraß

Definition 8.1. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein topologischer Raum.

$$C(X) = \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$

ist die Menge aller stetigen reellen Funktionen auf X.

Definition 8.2. Es sei $(X, \mathscr{O})$ ein kompakter topologischer Raum. Auf $C(X)$ definieren wir folgende Metrik:

$$d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}.$$

Die Metrik d heißt auch die Supremumsmetrik und die von ihr auf $C(X)$ erzeugte Topologie heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Bemerkung 8.3. Die Metrik ist wohldefiniert, da $f(X)$ als kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ insbesondere beschränkt ist und somit ein Supremum besitzt. Dass alle geforderten Metrik-Eigenschaften erfüllt sind, ist klar.

Definition 8.4. Es sei $V = (V, +)$ ein K-Vektorraum, wobei K ein Körper ist. $(V, +, \cdot_V, \cdot_{skalar})$ ist eine *K-Algebra*, falls $(V, +, 0, \cdot)$ ein Ring ist.

Beispiele 8.5.

1. Der Raum der Polynome über $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}[X] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

   ist ein unendlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Monome $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Basis. Mit der bekannten Multiplikation ist $\mathbb{R}[X]$ eine $\mathbb{R}$-Algebra.

2. Der Raum der stetigen Funktionen $C(X)$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra mit $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).(f+g)(x) = f(x) + g(x), (r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$. Er besitzt sogar eine 1, nämlich die konstante 1-Funktion.

Definition 8.6. Es sei $D \subseteq C(X)$. $A(D)$ sei die von D in $C(X)$ erzeugte Unteralgebra von $C(X)$, d.h. $C(X)$ ist die Menge der Polynome in Elementen von D:

$$A(D) = \left\{ \sum_{0 \leq \nu_1, ..., \nu_r \leq n} a_{\nu_1,...,\nu_r} d_1^{\nu_1} ... d_r^{\nu_r} \mid n, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, d_1, ..., d_r \in D, a_{\nu_1,...,\nu_r} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Satz 8.7 (Der Satz von Stone und Weierstrass, 1885 und 1937)**.** *Es sei X kompakt und Hausdorff'sch, $D \subseteq C(X)$ erfülle*

(a) $\forall x \in X \exists f_x \in D f_x(x) \neq 0$

(b) $\forall x, y \in X (x \neq y \to \exists f_{x,y} \in D f_{x,y}(x) \neq f_{x,y}(y))$

Dann gilt in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Raum $(C(X), d)$, dass $\overline{A(D)} = C(X)$.

Lemma 8.8. *Es gibt Polynome $p_n \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\forall n p_n(0) = 0$ und auf $I = [0,1]$ die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $t \mapsto \sqrt{t}$ konvergiert.*

Beweis: Wir setzen:

$$p_0(t) = 0, p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right)$$

Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(\sqrt{t} - p_{n+1}(t)) = (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \tag{1}$$

Wir beweisen induktiv über n gleichzeitig noch zwei Eigenschaften:

$$\forall t \; p_n(t) \geq 0 \tag{2}$$

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \tag{3}$$

- Der Anfang ist klar.

- Gelte $(2)_n$ und $(3)_n$. Zu zeigen ist $(2)_{n+1}$ und $(3)_{n+1}$. Es gilt

$$p_{n+1}(t) = \underbrace{p_n(t)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}(t - p_n^2(t))}_{\geq 0 \text{ nach } 3_n} \geq 0$$

Wir setzen Gleichung (1) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&(2 + (n+1)\sqrt{t})(...) = (2 + (n+1)\sqrt{t})(\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&= ((2 + n\sqrt{t})(\sqrt{t} - p_n(t)) + \sqrt{t}(\sqrt{t} + p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&\leq (2\sqrt{t} + \sqrt{t}(\sqrt{t} + p_n(t)))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&= 2\sqrt{t}(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \\
&= 2\sqrt{t}(1 - \frac{1}{4}(\sqrt{t} + p_n(t))^2) \leq 2\sqrt{t}
\end{aligned}$$

Aus (3) folgt, dass

$$\sup\{|\sqrt{t} - p_n(t)| \mid t \in [0,1]\} \to 0$$

□

Lemma 8.9. *Es sei $I = [-a, a], a \in \mathbb{R}, a > 0$. Dan gibt es eine Folge von Polynomen, die auf I gleichmäßig gegen $t \mapsto |t|$ konvergiert.*

Beweis: Es seien die p_n wie in Lemma 8.8 und sei

$$q_n := a \cdot p_n\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2\right)$$

Dann konvergiert die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $|t|$ auf $[-a, a]$. □

Lemma 8.10. *Es sei X kompakt und Hausdorff'sch. Es sei $A \subseteq C(X)$ eine topologisch abgeschlossene Unteralgebra von $C(X)$. Dann sind für $f, g \in A$ auch die Funktionen $|f| \in A, \max\{f, g\} \in A, \min\{f, g\} \in A$.*

Beweis: Es ist

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|, \max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|$$

Also bleibt nur zu zeigen, dass $f \in A \longrightarrow |f| \in A$. Wir haben $q_n(t)$ wie im 2.Lemma, dass auf $[-a,a]$ gleichmäßig gegen $|t|$ konvergiert. Dann konvergiert $q_n \circ f$ gleichmäßig gegen $|f|$, denn, falls $\forall t \in [-a,a]|q_n(t) - |t|| < \varepsilon$, so ist $\forall x \in X|q_n(f(x)) - |f(x)|| < \varepsilon$. $q_n \circ f \in A$, da A eine Unteralgebra und q_n ein Polynom ist. □

Lemma 8.11. *Es sei A eine Unteralgebra von $C(X)$, X kompakt und Hausdorff'sch. Dann ist $\overline{A}$ eine Unteralgebra von $C(X)$.*

Beweis: Da $C(X)$ ein metrischer Raum ist, hat jedes $f \in C(X)$ eine abzählbare Umgebungsbasis.
Es seien $f, g \in \overline{A}$. Es gibt zu f und g konvergente Folgen $q_{f,n}, q_{g,n}$ aus A. Dann ist z.B. $f \cdot g = \lim_{n\to\infty}(q_{f,n} \cdot q_{g,n})$. □

Beweis des Satzes: Es sei $D \subseteq C(X)$ wie in der Voraussetzung, $f \in C(X)$. Zu zeigen: $f \in \overline{A(D)}$.

- 1.Schritt: Zu je zwei Punkten $y, z \in X$ gibt es ein $h \in A(D)$, sodass $h(y) = f(y), h(z) = f(z)$: Es gilt nach Voraussetzung $f_1 \in D, f_1(y) \neq 0, f_2 \in D, f_z(z) \neq 0$. Dann gibt es $f_y = \frac{f_1}{f_1(y)}, f_z = \frac{f_2}{f_2(z)}$, sodass $f_y(y) = 1, f_z(y) = 1$. Weiterhin gilt

$$h_1 := f_y + f_z - f_y \cdot f_z \in A(D) \Longrightarrow h_1(y) = h_1(z) = 1$$

  Falls $y \neq z$, so gibt es nach Voraussetzung $h_2 \in D, h_2(y) \neq h_2(z)$. Dann erfüllt

$$h := \frac{f(y) - f(z)}{h_2(y) - h_2(z)} \cdot h_2 - \frac{f(y)h_2(z) - f(z)h_2(y)}{h_2(y) - h_2(z)} \in A(D)$$

  die Bedingung.
  Falls $z = y$, so nehmen wir

$$h = f_y$$

- 2.Schritt: Nun nutzen wir die Kompaktheit von X. Behauptung:

  $\forall \varepsilon > 0, \forall z \in X, \exists h_z \in \overline{A(D)}, (h_z(z) = f(z) \wedge \forall x \in X h_z(x) < f(x) + \varepsilon)$.

  Für alle $y \in X \exists g_y \in A(D)$, sodass $g_y(z) = f(z), g_y(y) = f(y)$ nach dem ersten Schritt.

$$\forall y \exists U_y \in \mathscr{U}(y), \forall z' \in U_y, g_y(z) < f(z) + \varepsilon$$

nach Stetigkeit von f. Die Mengen $\{U_y \mid y \in X\}$ überdecken X und besitzen somit eine endliche Teilüberdeckung $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$. Dann erfüllt

$$h_z := \min\{g_{y_i} \mid i = 1, ..., k\}$$

die Bedingung.

- 3.Schritt: Für $z \in X$ sei h_z wie im zweiten Schritt. Dann gibt es Umgebungen, s.d. $h_z(y) > f(y) - \varepsilon$ in der Umgebung. Bilden des Maximums zeigt die Behauptung.

□

Kapitel 9

Uniforme Räume

Definition 9.1. Es sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X \times X$. Wir setzen

(a) $A^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$.

(b) $BA = \{(x, y) \mid \exists z (z, y) \in B \wedge (x, z) \in A\}$.

(c) $A^2 = AA$, $A^{n+1} = A^n A$.

(d) $A \subseteq X \times X$ heißt symmetrisch, wenn $A^{-1} = A$,

(e) Wenn X aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Nun gelten $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $A(BC) = (AB)C$. Wenn $A \subseteq B$, so ist $A^{-1} \subseteq B^{-1}$ und für jedes C, $AC \subseteq BC$, $CA \subseteq CB$. Falls $\Delta \subseteq A$ so ist $A \subseteq A^n$.

Definition 9.2. X Menge. $\mathscr{U} \subseteq X \times X$ heißt uniforme Struktur oder Nachbarschaftsfilter auf X, wenn folgendes gilt

$\mathscr{U} \neq \emptyset$ und $\forall A \in \mathscr{U} (\forall B \subseteq X \times X)(B \supseteq A \to B \in \mathscr{U})$.

$\mathscr{U}$ ist gegen endliche Schnitte abgeschlossen

$\forall A \in \mathscr{U}\ \Delta \subseteq A$.

$(\forall U \in \mathscr{U})(U^{-1} \in \mathscr{U})$.

$\forall U \in \mathscr{U} \exists V \in \mathscr{U} V^2 \subseteq U$.

$(X, \mathscr{U})$ heißt uniformer Raum.

Definition 9.3. Es sei $\mathscr{U}$ eine uniforme Struktur. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ heißt Fundamentalsystem für $\mathscr{U}$, wenn $\forall U \in \mathscr{U} \exists B \in \mathscr{B} B \subseteq U$.

Satz 9.4. *Ist $\mathscr{B}$ eine Fundmentalsystem für $\mathscr{U}$ so sind auch $\mathscr{B}' = \{A \cap A^{-1} \mid A \in \mathscr{B}\}$ und $\mathscr{B}_n = \{A^n \mid A \in \mathscr{B}\}$ Fundamentalsysteme.*

Beweis: □

Satz 9.5. *Es sei $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$. $\mathscr{B}$ ist Basis für eine uniforme Struktur genau dann wenn folgendes gilt:*

(a) Für jedes endliche Teilmenge $\mathscr{B}_0$ von $\mathscr{B}$ gibt es ein $C \in \mathscr{B}$, so dass $C \subseteq \bigcap \mathscr{B}_0$.

(b) $\forall B \in \mathscr{B} \Delta \subseteq B$.

(c) $\forall B \in \mathscr{B} \exists B' \in \mathscr{B} B' \subseteq B^{-1}$.

(d) $\forall B \in \mathscr{B} \exists B' \in \mathscr{B} (B')^2 \subseteq B$.

Wenn (a) bis (d) gelten, dann ist $\mathscr{B}$ Basis der uniformen Struktur $\mathscr{U}(\mathscr{B}) = \{V \subseteq X \times X \mid \exists B \in \mathscr{B} B \subseteq V\}$.

Teil II

Algebraische Topologie

Kapitel 10

Quotienten und Gruppenoperationen

Wir erinnern uns zuerst an die Quotiententopologie: Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $p\colon X \to {}^X/_\sim$ definiert durch $p(x) = [x]_\sim$. Die Quotiententopologie von $(X, \mathcal{O}, \sim)$, die auf ${}^X/_\sim$ lebt, ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_\sim := \{V \subseteq {}^X/_\sim \mid p^{-1}[V] \in \mathcal{O}\}$$

Satz 10.1. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt:*

1. *Wenn X kompakt ist, so ist ${}^X/_\sim$ kompakt.*
2. *Wenn X (weg-) zusammenhängend ist, so ist ${}^X/_\sim$ (weg-) zusammenhängend.*

Beweis:
1. p ist stetig, also ist $p[X]$ kompakt. Weil p surjektiv ist, ist $p[X] = {}^X/_\sim$.
2. p ist stetig, also ist $p[X]$ (weg-) zusammenhängend. Weil p surjektiv ist, ist $p[X] = {}^X/_\sim$.

□

Beispiele 10.2 (Das Zusammenfalten von Räumen). Es sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wir schreiben ${}^X/_A$ für ${}^X/_\sim$, wenn $\sim$ wie folgt definiert ist:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y & x \notin A \\ x, y \in A \end{cases}$$

Dies lässt sich auch endlich oft iterieren:

$$X/A_1, A_2 = (X/A_1)/(A_2/A_1)$$

Für zwei abgeschlossene, disjunkte Mengen. Alternativ kann man auch $\sim$ wie folgt definieren:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y & x \notin A_1 \cup A_2 \\ x, y \in A_1 & \\ x, y \in A_2 & \end{cases}$$

Warum nimmt man in diesem Beispiel abgeschlossene Mengen A? Man möchte Satz 5.13(3) und weitere Teile dieses Satzes anwenden.

Beispiel 10.3 (Homöomorphietyp eines Kegels). Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Der Kegel CX (der in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet werden kann) ist definiert als

$$CX := X \times [0,1]/X \times \{1\}$$

Es sei $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\}$. CX ist homöomorph zu

$$\tilde{CX} := \{(1-t) \cdot x' + t \cdot p \mid t \in [0,1], x' \in X \times \{0\}\}$$

Beweis: Es sei $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Wir definieren $\tilde{f} \colon X \times [0,1] \to \tilde{CX}$ wie folgt:

$$\tilde{f}(x,t) := (1-t) \cdot (x,0) + p \cdot t.$$

Wenn $x \in X$, so ist $(x,0) \in X \times \{0\}$; daher geht die Abbildung in den angegebenen Bildraum. Die Abbildung $\tilde{f}$ ist stetig nach unserer Kenntnis der Analysis. Weiterhin gilt

$$\tilde{f}[X \times \{1\}] = \{p\}$$

Ebenfalls ist $\tilde{f} \restriction X \times [0,1)$ injektiv. Also ist die Quotientenabbildung $f([x]) = \tilde{f}(x)$ wohldefiniert, stetig und bijektiv. Wenn X kompakt ist, so nach Satz 7.10 $\tilde{f}$ offen (auf dem Bildraum nimmt man die Spurtopologie von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $\tilde{CX}$). Nach der Definition der Quotiententopologie ist auch f mit $f \circ p = \tilde{f}$ offen.

Ein gesuchter Homöomorphismus $f \colon CX \to \tilde{CX}$ ergibt sich als $f([x]_\sim) = \tilde{f}(x)$. □

Beispiel 10.4 (Die abgeschlossene Einheitskugel). Es sei

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\},\ S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

Es gilt $S^{n-1} = \partial B^n$. Es sei $n \geq 1$. Dann gilt

$$B^n/_{S^{n-1}} \cong S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Beweis: Wir definieren zuerst $\tilde{f}\colon B^n \to S^n$ durch

$$\tilde{f}(x) = -\cos(\pi \cdot |x|) \cdot e_{n+1} + \sin(\pi \cdot |x|) \cdot (\frac{x}{|x|}, 0).$$

Wir glauben, dass $\tilde{f}$ stetig ist und dass $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = S^n$ ist. Weiterhin ist $\tilde{f} \restriction (B^n \setminus S^{n-1})$ injektiv und $\tilde{f}[S^{n-1}] = \{e_{n+1}\}$. Also ist

$$f\colon B^n/_{S^{n-1}} \to S^n,\ \text{mit } f([x]_\sim) = \tilde{f}(x)$$

ein gesuchter Homöomorphismus. □

Beispiel 10.5. Es gilt

$$\frac{S^n \times [-1,1]}{S^n \times \{1\}, S^n \times \{-1\}} \cong S^{n+1}$$

Beweis: Es sei $H\colon S^n \times [-1,1] \to S^{n+1}$ definiert durch

$$H(x,t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)(0,-1) + \sin\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)(x,0).$$

Dann gilt $H(x,t) \in S^{n+1}$, falls $x \in S^n$, $t \in [-1,1]$. Nun ist $H(x,t) = H(y,s)$ nur für $s = t = 1$ oder $s = t = -1$, also nur für $(x,t) \sim (y,s)$. Wenn wir uns erneut auf die induzierte Abbildung $f([x,t]_\sim) = H(x,t)$ zurückziehen, erhalten wir den gewünschten Homöomorphismus. □

Definition 10.6 (und Existenzbehauptung)**.** Es seien X eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Relation. Dann ist Eq(R) die kleinste Äquivalenzrelation auf X, sodass Eq(R) $\supseteq R$. *$Eq(R)$ heißt die von R erzeugte Äquivalenzrelation*

$$\mathrm{Eq(R)} := \bigcap\{R' \supseteq R \mid R' \text{ Äquivalenzrelation}\}.$$

Wir schneiden über eine nichtleere Menge, da $X \times X \supseteq Eq(R)$ eine Äquivalenzrelation ist. Man überlege sich, dass dies wohldefiniert ist. Dazu kann man

zum Beispiel zeigen, dass der Schnitt beliebig vieler Äquivalenzrelationen wieder eine Äquivalenzrelation ist.

Alternativ kann man R auch von unten her konstruieren: Wir definieren induktiv über $n \in \mathbb{N}$ eine Relation R_n. $R_0 = \Delta \cup R$,

$$R_{n+1} = R_n \cup \{(x,z),(z,x) \mid \exists y((x,y) \in R_n \wedge (y,z) \in R_n)\}.$$

Dann ist $\bigcup R_n$ eine Äquivalenzrelation, und es gilt $\mathrm{Eq(R)} = \bigcup R_n$.

Beispiel 10.7 (Möbiusband). Es sei $X := [0,1] \times [0,1]$ mit der Standardtopologie des $\mathbb{R}^2$, und R definiert durch $R = \{((0,y),(1,1-y)) \mid y \in [0,1]\}$. Es sei $\sim$ die von R erzeugte Äquivalenzrelation (wobei wir lediglich die Diagonale hinzufügen). Dann heißt ${}^X/_\sim$ mit der Quotiententopologie Möbiusband.

Beispiel 10.8 (Klein'sche Flasche). Es sei

$$X = S^1 \times [0,1],\ R := \{((x,y,0),(-x,-y,1)) \mid (x,y) \in S^1\}$$

Hier bei ist X mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^3$ ausgestattet. Es sei $\sim$ die von R erzeugte Äquivalenzrelation. ${}^X/_\sim$ mit der Quotiententopologie heißt Klein'sche Flasche.

Beispiel 10.9 (Projektiver Raum). Es sei $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}^{n+1}$. Es sei

$$\sim := \{(x,y) \in X \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}\, x = \lambda y\}$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. $\mathbb{R}P^n = {}^X/_\sim$ (der projektive Raum) ist der Raum aller 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $\sim$ erzeugten Quotiententopologie.

10.1 Quotienten nach Gruppenoperationen

Definition 10.10. Es sei $(G, \circ_G, e)$ eine Gruppe und X eine Menge. Eine Abbildung $\circledast\colon G \times X \to X$ heißt *Gruppenoperation*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hata:

(i) $\forall x \in X(e \circledast x = x)$

(ii) $\forall f,g \in G((f \circ_G g) \circledast x = f \circledast (g \circledast x))$

Es sei $x \in X$ fest. Wir schreiben

$$Gx := \{g \circledast x \mid g \in G\}.$$

Gx heißt die *Bahn* oder der *Orbit* von x. Es sei

$$G_x := \{g \in G \mid g \circledast x = x\}.$$

G_x heißt die *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe* von x.
Die Gruppenoperation heißt *transitiv*, falls

$$\forall x, y \in X \; \exists g \in G \; (g \circledast x = y).$$

Äquivalent, falls $\forall x \in X \; Gx = X$.

Bemerkung 10.11. Aufgrund der Assoziativität schreiben wir einfach

$$fgx := (f \circ_G g) \circledast x = f \circledast (g \circledast x)$$

Korollar 10.12. *1. G_x ist eine Untergruppe von G.*

2. Die Bahnen Gx sind Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation

$$\sim := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists g \in G \; g \circledast x = y\}.$$

3. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \circledast \colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\longmapsto g \circledast x \end{aligned}$$

ist eine Gruppenoperation.

(b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon G \to \mathrm{Sym}(X) &:= \{f \colon X \to X \mid f \text{ bijektiv}\} \\ g &\longmapsto (x \mapsto g \circledast x) \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von $(G, \circ_G)$ nach $(\mathrm{Sym}(X), \circ)$.

Beweis: Es sei G eine Gruppe, X eine Menge, $\circledast$ eine Gruppenoperation. Wir zeigen (1): $e \in G_x$ nach (i) der Gruppenoperationsaxiome. Es seien $g, h \in G_x$. Dann gilt

$$(g \circ_G h) \circledast x = g \circledast (h \circledast x) = g \circledast x = x$$

also gilt $(g \circ_G h) \in G_x$. Behauptung (2) ist klar.

Nun zu Behauptung (3): (a)$\Longrightarrow$(b): Wir überprüfen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Weil für jedes $x \in X$ die Gleichung $ex = x$ gilt, ist $\varphi(e) = \mathrm{id}$. Es sei $x \in X$ beliebig.

$$\begin{aligned}\varphi(g \circ_G h)(x) &= (g \circ_G h)(x) = g \circledast (h \circledast x) = g \circledast (\varphi(h)(x)) \\ &= \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)\end{aligned}$$

(b)$\Longrightarrow$(a): Es sei $x \in X$ beliebig. Weil $\varphi(e) = \mathrm{id}$, gilt

$$x = \mathrm{id}(x) = \varphi(e)(x) = e \circledast x$$

Weiterhin gilt (nach Homomorphismuseigenschaft):

$$(g \circ_G h) \circledast x = \varphi(g \circledast h)(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) = g \circledast (h \circledast x).$$

□

Definition 10.13. Es sei $G \times X \to X$ eine Gruppenoperation und $A \subseteq X$. Die *Standgruppe* von A ist definiert als

$$G_A := \{g \in G \mid gA = A\}$$

wobei $gA := \{ga \mid a \in A\}$. Dies ist also nicht punktweise interpretiert.

Definition 10.14. Der *Bahnenraum* von G und X ist

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\}$$

Beispiele 10.15.

1. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie und $G := GL(n, \mathbb{R})$ die Gruppe aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $\det(A) \neq 0$ mit der Matrizenmultiplikation. Wir betrachten die Operation von G auf $\mathbb{R}$ durch

   $$(A, r) \longmapsto Ar$$

   Dass dies eine Gruppenoperation ist, folgt aus den Erkenntnissen der linearen Algebra.
   Der $\mathbb{R}^n$ zerfällt unter dieser Operation in zwei Bahnen: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dies folgt aus dem Basiswechselsatz.

2. Es sei $V = \mathbb{R}^n$.

$$X = G(n,k) = \{\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) \mid \quad v_i \in \mathbb{R}^n \wedge \dim(\text{span}(v_1, \ldots, v_n)) = k\}$$

ist der Raum der n-Tupel von Vektoren, die einen k-dimensionalen Unterraum aufspannen. Es sei $G = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A^{-1}\}$ mit der Matrizenmultiplikation. Dies ist die orthogonale Gruppe. Wir betrachten die Operation von G auf X durch

$$(A, V) = (A, \langle v_1, ..., v_n\rangle) \longmapsto \langle Av_1, ..., Av_n\rangle$$

Es sei $B := \{\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) \in X \mid \dim(\text{span}(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle)) = k, v_i = 0 \text{ für } i = k+1, \ldots n\} \subseteq X$. Für G_B gilt

$$G_B = G'_B := \{A \in O(n) \,|\, \exists A_1 \in O(k)\ \exists A_2 \in O(n-k)\ A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\}$$

$G_B \supseteq G'_B$ ist klar. $G_B \subseteq G'_B$ folgt mit ein bisschen linearer Algebra. Wir behaupten, dass $O(n)$ transitiv auf X operiert. Es seien $\langle v_1, ..., v_n\rangle$ und $\langle v_1, ..., v_n\rangle \in X$, und es seien die Indizes $n_1, \ldots, n_k$ und $m_1, \ldots, m_k$ so gewählt, dass

$$\text{span}(\langle v_1, \ldots, v_n\rangle) = \text{span}(\langle v_{n_1}, \ldots, v_{n_k}\rangle)$$

und

$$\text{span}(\langle w_1, \ldots, w_n\rangle = \text{span}(\langle w_{m_1}, \ldots, w_{m_k}\rangle).$$

Wir nehmen $\langle b_1, ..., b_k\rangle$ und $\langle c_1, ..., c_k\rangle$ so dass dies Orthonormalbasen von $\text{span}(\langle v_{n_1}, \ldots, v_{n_k}\rangle)$ und von $\text{span}(\langle w_{m_1}, \ldots, w_{m_k}\rangle)$ sind. Diese ergänzen wir zu Orthonormalbasen $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ und $\langle c_1 \ldots, c_n\rangle$ von $\mathbb{R}^n$. Die Basiswechselmatrix, die b_i auf c_i abbildet, is orthonormal.

Lemma 10.16. *Wenn G transitiv auf X operiert, so ist für jedes $x \in X$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_x = \varphi \colon {}^{G}\!/_{G_x} &\to X \\ [g] &\longmapsto gx \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis: Zuerst die Wohldefiniertheit. Es sei $g_1 \sim g_2$, d.h. $\exists h \in G_x\ (g_1 h = g_2)$. Dann gilt

$$\varphi([g_2]) = g_2 x = g_1 h x = g_1(hx) = g_1 x = \varphi([g_1])$$

Injektivität: Es sei $\varphi([g_1]) = \varphi([g_2])$. Dann ist $g_1 x = \varphi([g_1]) = \varphi([g_2]) = g_2 x$. Also ist $g_2^{-1} g_1 x = x$ und $g_1 \sim g_2$. Surjektivität: Es sei $y \in X$. Dank der Transitivität der Operation gibt es ein $g \in G$, sodass $gx = y$. Dann gilt

$$\varphi([g]) = gx = y$$

□

Definition 10.17. Es sei $(G, \circ_1)$ eine Gruppe, $\mathscr{O}$ eine Topologie auf G. $(G, \circ_1, \mathscr{O})$ heißt *topologische Gruppe*, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot \colon G \times G &\to G \\ (g, h) &\longmapsto g \circ_1 h^{-1} \end{aligned}$$

stetig ist.

Lemma 10.18. *Es sei $(G, \circ_1, \mathscr{O})$ eine topologische Gruppe. Dann sind folgende Abbildungen stetig:*

1. $^{-1} \colon G \to G, x \longmapsto x^{-1}$
2. $\circ_1 \colon G \times G \to G, (a, b) \longmapsto a \circ_1 b$

Beweis: Das undekorierte $\circ$ bezeichnet die Hintereinanderausführung.

1. Es gilt $^{-1} = \cdot \circ (1, \mathrm{id})$ und $(1, \mathrm{id})$ ist stetig, da id und $x \longmapsto 1$ stetig sind.
2. Es gilt $\circ_1 = \cdot \circ (\mathrm{id}, ^{-1})$ und $(\mathrm{id}, ^{-1})$ ist stetig, da $^{-1}$ stetig ist (nach 1).

□

Bemerkung 10.19. In einer topologischen Gruppe $(G, \circ_1)$ (mit $gh = g \circ_1 h$) sind die Linksmultiplikation $l_g = (h \mapsto gh)$ und Rechtsmultiplikation $r_g = (h \mapsto hg)$ Homöomorphismen.

Beweis: Da $\cdot$ zweistellig aufgefasst stetig ist, ist jede einstellige Version ebenfalls stetig, da

$$l_g = \cdot \circ (g, \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}, ^{-1})$$

Da $^{-1} = \cdot \circ (1, \mathrm{id})$ stetig ist. Weil $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$, ist die Umkehrabbildung stetig und l_g ist bijektiv, da G eine Gruppe ist. □

Definition 10.20. Es sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Der Quotientenraum ${}^{G}\!/_{H}$ mit der Quotiententopologie heißt *homogener Raum*.

Wir fassen G/H auf als $x \sim_H y$, wenn $\exists h \in H, h \circ x = y$.

Korollar 10.21. *Die Abbildung $p\colon G \to {}^{G}\!/_{H}$ ist stetig und offen.*

Beweis: Es sei $U \subseteq G$ offen. Zu zeigen ist, dass $p[U]$ offen in ${}^{G}\!/_{H}$ ist, d.h. $p^{-1}[p[U]]$ ist offen in G. Dies gilt, denn

$$p^{-1}[p[U]] = \bigcup_{h\in H} Uh = \bigcup\{l_h[U] \mid h \in H\}$$

Und für jedes $h \in H$ ist $l_h[U]$ offen (da ${}_h$ ein Homöomorphismus ist). □

Bemerkung 10.22. Falls H abgeschlossen ist in G und G Hausdorff'sch, so ist G/H Hausdorff'sch. Wenn ${}^{G}\!/_{H}$ T1 ist, so ist H abgeschlossen.

Beweis: Wir behaupten, dass

$$R = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_2 g_1^{-1} \in H\}$$

abgeschlossen im Raum $G \times G$ ist. Dies sieht man wir folgt: Es ist $x \sim_H y$ gdw $yx^{-1} \in H$. Dann ist R ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung, denn die Gruppenverknüpfung ist als zweistellige Funktion stetig. Die Projektion ist offen und die Relation ist abgeschlossen. Nach Satz 5.13(3) ist also der Quotient G/H Hausdorff'sch.

Nach Satz 5.13(1) gilt: Wenn ${}^{G}\!/_{H}$ T1 ist, so ist $\{1_E\}$ abgeschlossen und somit auch $p^{-1}[\{1\}] = H$. □

Kapitel 11

Homotopie

Von nun an seien alle Abbildungen stetig. Wenn wir also $\gamma\colon I \to X$ schreiben, ist damit gemeint, dass $I = [0,1]$ mit der Standardtopologie von $\mathbb{R}$ ausgestattet ist und X eine Topologie trägt und γ bezüglich dieser beiden Topologien stetig ist.

Definition 11.1. Es seien X, Y topologische Räume, $f, g\colon X \to Y$ stetig. f heißt *homotop* zu g mittels/durch/via h genau dann, wenn $h\colon X \times [0,1] \to Y$ stetig ist und

$$\forall x \in X\ h(x,0) = f(x) \wedge h(x,1) = g(x)$$

Man schreibt kurz $f \sim_h g$. $f \sim g$ heißt $\exists h\ f \sim_h g$.

Definition 11.2. $f \sim_{h,A} g$, genannt, f und g sind *homotop relativ zu* A via h, man schreibt $f \sim_{\mathrm{rel}A} g$ oder $f \sim_{h,\mathrm{rel}A} g$, wenn $f \restriction A = g \restriction A$ sowie $f \sim_h g$ und $\forall t \in I\ h_t \restriction A = f \restriction A = g \restriction A$. Hier ist $h_t(x) = h(x,t)$. Man sagt statt homotop auch homotopieäquivalent.

Beispiel 11.3. Es sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to X$ gegeben durch $\gamma_1(t) = exp(\pi it), \gamma_2(t) = exp(-\pi it)$. Ist $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2$? Wir haben ja den Nullpunkt herausgenommen. Mit Überlagerungen werden wir zu Ende des Kapitels einen Beweis führen.

Satz 11.4. *Die Homotopie (relativ zu einer Menge A) ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y.*

Beweis: Reflexiv: Es sei $h(x,t) = f(x)$ für $t \in [0,1]$. Dann ist $f \sim_h f$.

Symmetrisch: Es sei h stetig, sodass $h(x,0) = f(x), h(x,1) = g(x)$. Weil die Abbildung $\varphi\colon t \mapsto 1 - t$ stetig ist, ist $h' = h \circ (id, \varphi)$ stetig.

Transitiv: Es seien $f \sim_{h_1} g, g \sim_{h_2} k$. Es sei

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1(x,2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(x,2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert, da $h_1(x,1) = g(x) = h_2(x,0)$. Weiterhin ist h stetig, da $h \restriction X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ und $h \restriction X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ stetig sind (nach Satz 2.8) □

Lemma 11.5. *Es seien $f_0, f_1 \colon X \to Y$ sowie $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ und sei $f_0 \sim_{h_0} f_1, g_0 \sim_{h_1} g_1$. Dann ist $g_0 \circ f_0 \sim_H g_1 \circ f_1$, wobei*

$$H(x,t) = h_1(h_0(x,t),t)$$

Beweis: Zuerst ist $H \colon X \times I \to Z$ als Einsetzung stetiger Funktionen in eine stetige Funktion stetig. Weiterhin gilt

$$H(x,0) = h_1(h_0(x,0),0) = h_1(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x)$$

$$H(x,1) = h_1(h_0(x,1),1) = h_1(f_1(x),1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$$

□

Beispiel 11.6. Es sei $g \colon \mathbb{R}^n \to \{0\}$, $f = id \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $f \sim_h g$ mit

$$h \colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n,\ h(x,t) = x - tx$$

Denn h ist stetig laut der Analysis und $h(x,0) = x = f(x), h(x,1) = x - x = 0 = g(x)$.

Nun lässt sich aus der Homotopieäquivalenz zwischen Funktionen auch eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen Räumen definieren.

Definition 11.7.

1. Eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine Abbildung $g \colon Y \to X$ gibt, so dass

   $$g \circ f \sim id_X \wedge f \circ g \sim id_Y.$$

   Man sagt, g bezeugt, dass f eine Homotopieäquivalenz ist.

2. Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es eine Homotopieäquivalenz f (oder gar als (f,g) geschrieben, mit einem Zeugen g) gibt. Wir schreiben $X \simeq Y$, $X \simeq_f Y$ oder auch $X \simeq_{f,g} Y$.

3. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn X zum Einpunktraum homotopieäquivalent ist.

Bemerkung 11.8. Die Homotopieäquivalenz ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation:

1. $X \simeq X$ durch $f = id$.
2. Falls $X \simeq Y$ via (f, g), so ist $Y \simeq X$ durch (g, f).
3. Es sei $X \simeq Y$ durch f_0 (bezeugt von f_1) und $Y \simeq Z$ durch g_0 (bezeugt durch g_1). So ist $X \simeq Z$ durch $g_0 \circ f_0$ (bezeugt von $f_1 \circ g_1$):

   $$(g_0 \circ f_0) \circ (f_1 \circ g_1) = g_0 \circ (f_0 \circ f_1) \circ g_1 \sim g_0 \circ id_Y \circ g_1 = g_0 \circ g_1 \sim id_Z$$

   Die andere Richtung folgt genau so.

Bemerkung 11.9. Wenn X und Y homöomorph sind, so sind sie homotopieäquivalent:
Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, offen und bijektiv. Dann sind X und Y homotopieäquivalent durch f, bezeugt von f^{-1}.

Bemerkung 11.10. Kompaktheit und topologische Dimension sind nicht invariant unter Homotopieäquivalenz.

Lemma 11.11. *X ist zusammenziehbar genau dann, wenn es eine Abbildung $h\colon X \times I \to X$ und ein $x_0 \in X$ gibt, sodass*

$$\forall x \in X\ h(x, 0) = x, h(x, 1) = x_0.$$

Beweis: Es sei X zusammenziehbar zu $Y = \{0\}$ und sei $X \simeq_{f,g} Y$. Also gibt es $f\colon X \to \{0\}, g\colon \{0\} \to X$, sodass $gf \sim id_X$ und $fg \sim \mathrm{id}_{\{0\}}$. Es sei $x_0 = g(0)$. Dann gilt $gf(x) = x_0$ für jedes x. Nach Homotopie von gf und id_X gibt es $h\colon X \times I \to X$, sodass

$$\forall x \in X\ h(x, 0) = \mathrm{id}_X(x) = x,\ h(x, 1) = gf(x) = x_0.$$

Also erfüllt X die andere Bedingung.
Es sei $h\colon X \times I \to X$ und $x_0 \in X$, sodass

$$\forall x \in X\ h(x, 0) = x,\ h(x, 1) = x_0$$

Dann ist X homotopieäquivalent zu $Y = \{0\}$: Es sei $f(x) = 0$ für $x \in X$ und es sei $g(0) = x_0$. $f\colon X \to \{0\}$ und $g\colon \{0\} \to X$ sind stetig, weiterhin gilt

$$h(x, 0) = x = \mathrm{id}_X(x), \quad h(x, 1) = x_0 = (g \circ f)(x).$$

Also ist $\mathrm{id}_X \sim_h gf$. Weiterhin ist $fg(0) = 0$ und damit $fg = \mathrm{id}_{\{0\}}$ und gleiche Funktionen sind homotop. □

Definition 11.12. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es $x_0 \in X$ gibt, sodass

$$\forall x \in X \forall t \in I \ (1-t)x_0 + tx \in X$$

Bemerkung 11.13. Ist X sternförmig, so ist X zusammenziehbar.

Lemma 11.14. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Dann gilt: Existiert ein $h\colon X \times I \to X$, sodass*

$$\forall x \in X \ (h(x,0) = x \wedge h(x,1) \in A \wedge (x \in A \to h(x,1) = x)),$$

so sind A und X homotopieäquivalent.

Beweis: Es sei h wie im Lemma. Es sei $f\colon X \to A$ definiert durch $f(x) = h(x,1)$ und $g\colon A \to X$ die Inklusion. Wir behaupten, dass $gf \sim \mathrm{id}_X$ und $fg \sim \mathrm{id}_A$. Weil $h_1|_A = \mathrm{id}_A$, ist $f|_A = \mathrm{id}_A$ und somit $fg = \mathrm{id}_A$. Weiterhin ist $gf \sim \mathrm{id}_X$ durch h, denn

$$\forall x \in X \ h(x,0) = x \wedge gf(x) = g(f(x)) = g(h(x,1)) = h(x,1).$$

□

Beispiele 11.15.

1. $Z := S^1 \times \mathbb{R}$ ist homotopieäquivalent zu S^1, denn $S^1 \cong S^1 \times \{0\}$ und $h\colon Z \times I \to Z$, definiert durch

   $$h(x,y,t) = (x, y - ty)$$

   erfüllt die Bedingung des Lemmas.

2. $S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert durch

   $$h(x,t) = t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)x.$$

   Dann erfüllt h die Bedingung des Lemmas.

11.1 Die Fundamentalgruppe

Ein Weg $\gamma\colon I \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt Schleife.

Definition 11.16 (und Behauptung)**.** Es sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Wir definieren

$$\Omega(X, x_0) := \{\gamma\colon I \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Dies ist die Menge der x_0-Schleifen. Die *Fundamentalgruppe* von (X, x_0) hat als Trägermenge:

$$\pi_1(X, x_0) = {}^{\Omega(X,x_0)}/_{\sim_{rel(\{0,1\})}}.$$

Die Verknüpfung der Gruppe ist

$$[f] * [g] = [f * g]$$

mit

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ g(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das neutrale Element ist $\epsilon_{x_0} := (x \mapsto x_0)$. Der Punkt x_0 heißt Basispunkt. Man schreibt statt $(\pi_1(X, x_0), *, \epsilon_{x_0})$ oft nur die Trägermenge $\pi_1(X, x_0)$.

Für den Beweis, dass $(\pi_1(X, x_0), *, \epsilon_{x_0})$ eine Gruppe ist, benötigen wir:

Lemma 11.17. *Es sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schleife und $\varphi\colon I \to I$ stetig, sodass $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. Dann sind $\gamma \circ \varphi$ und γ $\{0,1\}$-homotop.*

Beweis: Es sei H definiert durch

$$H(t, s) = \gamma((1-s)t + s\varphi(t))$$

Dann ist H eine Homotopie von γ und $\gamma \circ \varphi$: H ist stetig laut der Analysis und

$$H(t, 0) = \gamma(t),\ H(t, 1) = \gamma(\varphi(t));$$

weiterhin ist

$$H(0, s) = \gamma(0 + 0) = \gamma(0),\ H(1, s) = \gamma(1 - s + s) = \gamma(1).$$

□

Lemma 11.18. *Es sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ und $\overline{\gamma}\colon I \to X$ definiert durch $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Dann ist $\gamma * \overline{\gamma}$ $\{0,1\}$-homotop zur konstanten x_0-Abbildung.*

Beweis: Es sei

$$H(t,s) := \begin{cases} \gamma(2ts) & t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{\gamma}(2ts+1-2s) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn

$$H\left(\frac{1}{2}, s\right) = \gamma(s) = \gamma(1-1+s) = \overline{\gamma}(1-s) = \overline{\gamma}(s+1-2s) = H\left(\frac{1}{2}, s\right)$$

Weiterhin ist sie eine $\{0,1\}$-Homotopie, denn

$$H(t,0) = \left\{ \begin{matrix} \gamma(0) = \gamma * \overline{\gamma}(0) & t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{\gamma}(1) = \gamma(0) = \gamma * \overline{\gamma}(0) & t \geq \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \quad ,$$

$$H(t,1) = \left\{ \begin{matrix} \gamma(2t) \\ \overline{\gamma}(2t+1-2) = \overline{\gamma}(2t-1) \end{matrix} \right\} \quad = \gamma * \overline{\gamma}(t)$$

$$H(0,s) = \gamma(0),\ H(1,s) = \overline{\gamma}(2 \cdot 1 \cdot s + 1 - 2s) = \overline{\gamma}(1) = \gamma(0) = x_0.$$

□

Lemma 11.19. *Die Verknüpfung $[f] * [g]$ definiert wirklich eine Gruppenoperation.*

Beweis:

1. $f*g$ wie in der Definition ist ein Weg, denn $f*g \restriction [0, \frac{1}{2}]$ sowie $f*g \restriction [\frac{1}{2}, 1]$ ist stetig, also ist auch $f * g$ stetig. Weiterhin gilt

$$f * g(0) = f(0) = x_0, f * g(1) = g(1) = x_0.$$

2. Die Äquivalenzklasse von $f * g$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten: Es sei $f_0 \sim_{\{0,1\},H_1} f_1, g_0 \sim_{\{0,1\},H_2} g_1$. Wir behaupten, dass

$$H(t,s) = \begin{cases} H_1(2t,s) & \text{für } t \leq \frac{1}{2}; \\ H_2(2t-1,s) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine $\{0,1\}$-Homotopie von $f_0 * g_0$ und $f_1 * g_1$ ist, denn

$$H(t,0) = \left\{ \begin{matrix} H_1(2t,0) = f_0(2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2}; \\ H_2(2t-1,0) = g_0(2t-1) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \quad = f_0 * g_0(t).$$

Ebenso für $s = 1$, also ist H eine $\{0,1\}$-Homotopie. Ebenfalls gilt

$$H(0,s) = H_1(0,s) = f_0(0) = (f_0 * g_0)(0);$$

$$H(1,s) = H_2(1,s) = g_0(0) = (f_0 * g_0)(0),$$

also ist H eine $\{0,1\}$-Homotopie.

3. Es sei f eine Schleife und g die konstante x_0-Abbildung. Die $\{0,1\}$-Homotopie von $g * f$ und f folgt aus Lemma 11.17. Da die Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2x-1, & \text{für } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

die Bedingungen des Lemmas erfüllt und $g * f = f \circ \varphi$, sind $g * f$ und f $\{0,1\}$-homotop.

4. Es sei $f\colon I \to X$ eine Schleife. Wir behaupten, dass

$$\overline{f}(x) := f(1-x)$$

invers zu f ist. Dies folgt aus Lemma 11.18

5. Assoziativität: Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Schleifen. Zu zeigen ist, dass $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ und $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ $\{0,1\}$-homotop sind. Dies folgt, denn es gilt

$$(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 = \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & t \geq \frac{3}{4} \end{cases},$$

und eine $\{0,1\}$-Homotopie ist gegeben durch

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{für } 0 \leq 4t \leq 1+s, \\ \gamma_2(4t-(1+s)) & \text{für } s+1 \leq 4t \leq s+2, \\ \gamma_3(1-\frac{4(1-t)}{2-s}) & \text{für } 4 \geq 4t \geq s+2, \end{cases}$$

denn

$$H(t,0) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad H(t,1) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4t-3) & t \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Und weiterhin gilt

$$H(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(0) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3(0)$$
$$H(1,s) = \gamma_3(1) = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(1) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3(1)$$

□

Bemerkung 11.20. Wie findet man eine solche vermittelnde $\{0,1\}$-Homotopie H? Es sei $\psi := (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ und es sei $\chi = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$. Wir suchen ein stetiges $\varphi\colon I \to I$, sodass $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ und für alle $t \in I$,

$$\psi(t) = \chi(\varphi(t)).$$

Dann können wir mit Lemma 11.17 ein H herstellen mit $\psi \sim_H \chi$. Wir definieren

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t, & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ t + \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}, & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Bemerkung 11.21. Wir können $\Omega(X, x_0)$ erneut topologisieren durch die kompakt-offene Topologie.

11.2 Die Fundamentalgruppe als Funktor

Definition 11.22. Eine *Kategorie* $\mathscr{C}$ besteht aus

1. eine Klasse von Objekten $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,
2. zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ von Morphismen,
3. Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ einer Verkettung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Hom}(X,Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z) &\to \mathrm{Hom}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

sodass folgendes gilt:

Identität: Zu jedem $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ gibt es einen ausgezeichneten Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$, sodass für alle $Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$:

$$f = f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f$$

Assoziativität: Für $X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, W)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beispiele 11.23.

1. Die Kategorie $\mathcal{T}op$ mit topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen.
2. Die Kategorie $\mathcal{T}op+$ der Topologischen Räume mit Basispunkt als Objekten und stetigen Abbildungen, die die jeweiligen Basispunkte aufeinander abbilden als Morphismen. Wir schreiben (X, x) für einen topologischen Raum mit Basispunkt x.
3. Die Kategorie *Grp* der Gruppen als Objekten und Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Definition 11.24. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Kategorien. Eine Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein *kovarianter Funktor*, falls $\mathcal{F}(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ für jedes $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ und

1. für $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$
2. für jedes $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ und jedes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ gilt $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$
3. für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

Satz 11.25. *Die Abbildung π_1, die einem topologischen Raum mit Basispunkt seine Fundamentalgruppe zuordnet, ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{T}op+$ nach Grp.*

Beweis: Da $\pi_1(X, x)$ eine Gruppe ist, ist die erste Eigenschaft erfüllt.
Wir definieren nun die Abbildung π_1 auch auf $\{f\colon X \to Y : f(x) = y\}$. Wir schreiben hierfür $f\colon (X, x) \to (Y, y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_1(f) =: f^*\colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(Y, y) \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus:

$$f^*[\gamma * \gamma'] = [f \circ (\gamma * \gamma')] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \gamma')].$$

Denn beide Abbildungen stimmen auf $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ und $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ überein.
Weiterhin gilt:

1. $\mathrm{id}_X^*(\gamma) = [\mathrm{id}_X \circ \gamma] = [\gamma]$. Also gilt $\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{\pi(X,x)}$.

2. Es seien $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op+}((X,x),(Y,y)), f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op+}((Y,y),(Z,z))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi_1(f) \circ \pi_1(g)[\gamma] =& (f^* \circ g^*)[\gamma] = f^*([g \circ \gamma]) \\ &= [f \circ g \circ \gamma] = (f \circ g)^*([\gamma]) = \pi_1(f \circ g)[\gamma].\end{aligned}$$

□

11.2.1 Die Rolle des Basispunktes

Nun lassen wir in einem topologischen Raum X den Basispunkt variieren und vergleichen $\pi_1(X,x)$ mit $\pi_1(X,y)$.

Satz 11.26 (Die Rolle des Basispunktes)**.** *Es sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von x nach y induziert einen Isomorphismus*

$$\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y).$$

Beweis: Es sei $\delta\colon [0,1] \to X$ ein stetiger Weg mit $\delta(0) = y$, $\delta(1) = x$. Wir definieren

$$\begin{aligned}J_\delta\colon \pi_1(X,x) &\to \pi_1(X,y) \\ [\gamma] &\longmapsto [\overline{\delta} * \gamma * \delta],\end{aligned}$$

wobei $\overline{\delta}(x) = \delta(1-x)$.

1. J_δ ist wohldefiniert, da Homotopie durch $*$ erhalten bleibt (wie im Beweis der Wohldefiniertheit von $*$ für Schleifen).

2. J_δ ist ein Gruppenhomomorphismus, da

$$[\gamma_1 * \gamma_2] \longmapsto [\overline{\delta} * \gamma_1 * \gamma_2 * \delta] = [\overline{\delta} * \gamma_1 * \delta * \overline{\delta} * \gamma_2 * \delta] = [\overline{\delta} * \gamma_1 * \delta] * [\overline{\delta} * \gamma_2 * \delta]$$

3. J_δ ist bijektiv, da die Umkehrabbildung durch $J_{\overline{\delta}}$ gegeben ist:

$$\forall \gamma \in \Omega(X,y), J_\delta(J_{\overline{\delta}}(\gamma)) = [\overline{\delta} * \delta * \gamma * \overline{\delta} * \delta] = [\gamma],$$

$$\forall \gamma \in \Omega(X,x), J_{\overline{\delta}}(J_\delta(\gamma)) = [\delta * \overline{\delta} * \gamma * \delta * \overline{\delta}] = [\gamma].$$

□

Korollar 11.27. *Wenn X wegzusammenhängend ist, hängt der Isomorphietyp von $\pi_1(X, x)$ nicht von der Wahl von x ab.*

Definition 11.28. Es seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to X$ Schleifen (u.U. mit verschiedenen Basispunkten). γ_0 und γ_1 heißen *geschlossen homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $h \colon I \times I \to X$ gibt, sodass

$$h(s,0) := h_0(s) = \gamma_0(s), h(s,1) := h_1(s) = \gamma_1(s)$$

und die Abbildung von I nach X, $s \mapsto h(s,t)$ auch h_t genannt, eine Schleife ist für alle $t \in I$.

Bemerkung 11.29. Falls γ_1, γ_2 Schleifen sind und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, so gilt

$$\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2 \Longrightarrow \gamma_1 \text{ ist geschlossen homotop zu } \gamma_2$$

Definition 11.30. Eine Schleife heißt zusammenziehbar in X, falls es ein $x \in X$ und eine geschlossene Homotopie h gibt, sodass $\gamma \sim_h \epsilon_x$.

Lemma 11.31. *Eine Schleife γ ist genau dann zusammenziehbar in X, falls $\gamma \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{\gamma(0)}$.*

Beweis: Die Rückwärtsrichtung ist gerade die Bemerkung von eben: Es sei $\gamma \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{\gamma(0)}$ durch h. Dann gilt per Definition $h_0 = \gamma, h_1 = \epsilon_{\gamma(0)}$. Weiterhin ist $h(0,t) = \gamma(0), h(1,t) = \gamma(1) = \gamma(0)$. Alle h_t sind also Schleifen.

Nun zur schwierigeren Implikation. Es ist eine geschlossene Homotopie gegeben, und diese soll verbessert werden zu einer $\sim_{\{0,1\}}$-Homotopie. Hierzu muss γ zum Punkt γ_0 zusammengezogen werden. Es sei h eine geschlossene Homotopie von γ, die γ auf x_0 zusammenzieht. Wir wählen einen Weg $\pi(s) = h(0,s)$ von $\gamma(0)$ nach x_0. Für $t \in [0,1]$ sei $\sigma_t(s) = h(0, t \cdot s)$. Damit ist $\sigma \colon I \times I \to X$, $\sigma(s,t) := \sigma_t(s) = h(0,st)$ stetig.

Nun wählen wir k so, dass k_t erst ein Stück t von π geht, dann die geschlossene Homotopie h_t geht und danach wieder rückwärts auf π. So haben wir $k_t(0) = k_t(1) = \gamma(0)$ für alle t. Genau sei

$k : I \times I \to X$ sei definiert durch für $t \in I$,

$$k_t = (\sigma_t * h_t) * \overline{\sigma_t}.$$

Ausführlich berechnet ist dies für $s, t \in I$,

$$k(s,t) = \begin{cases} h(0,4st) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ h(4s-1,t) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(0,t(2-2s)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt folgendes: $k(0,t) = \gamma(0)$. $k(1,t) = \gamma(0)$. $k(s,0) = (\sigma_0 * h_0) * \overline{\sigma_0})(s).k_0 = \gamma$, $k(s,1) = (\sigma_1 * h_1) * \overline{\sigma_1})(s)$.

1. $k_0 \sim_{\{0,1\}} \gamma$
2. $k_1 \sim_{\{0,1\}} \pi * \overline{\pi}$
3. $\gamma \sim_{\{0,1\}} \pi * \overline{\pi} \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$
4. $\gamma \sim_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$.

□

Satz 11.32. *Es sei $\gamma\colon I \to X$ eine Schleife und sei $\bar{\gamma}\colon {}^{I}/_{\{0,1\}} \to X$ die induzierte Abbildung. ${}^{I}/_{\{0,1\}} \cong S^1$ trage die Quotiententopologie und sei $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}, \overline{B^2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. Wir schreiben*

$$\bar{\gamma}([x]) = \tilde{\gamma}(\sin(2\pi x), \cos(2\pi x)) = \gamma(x) \text{ für } [x] \in I/\{0,1\}.$$

Nun ist $\tilde{\gamma}$ eine stetige Funktion von $S^1 = \{(\sin(2\pi x), \cos(2\pi x)) : x \in [0,1]\}$ aus.

Dann ist γ zusammenziehbar genau dann, wenn $\tilde{\gamma}\colon S^1 \to X$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{B^2}$ hat, d.h.

$$\exists f\colon \overline{B^2} \to X, f \restriction S^1 = \tilde{\gamma}$$

.

Beweis: Es sei γ die gegebene Schleife. Es sei $f\colon \overline{B^2} \to X$ stetig und sei $f \supseteq \tilde{\gamma}$. Wir definieren $H(x,t) = f(t \cdot (\sin(2\pi x), \cos(2\pi x)))$ für $x \in [0,1]$. Da die Multiplikation stetig ist, ist H stetig. Weiterhin ist $H_0 = \epsilon_{f(0)}$ und $H_1 = \tilde{\gamma}$. Für jedes $t \in I$ ist $H(0,t) = H(1,t)$, da $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$. Also ist $\gamma = \tilde{\gamma}(\sin(2\pi\cdot), \cos(2\pi\cdot))$ zusammenziehbar.

Für die umgekehrte Richtung sei $\tilde{\gamma} \sim_{H,\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$ und es sei $H_0 = \tilde{\gamma}, H_1 = \epsilon_{x_0}$. Für $y \in \overline{B^2}$ gilt $y = sx$ eindeutig mit $x \in S^1, s \in I$. Wir setzen

$$f(sx) = H(x, 1-s).$$

Dann ist $f\colon \overline{B^2} \to X$ stetig. Dann gilt für $x \in S^1$, dass $f(x) = H(x, 1-1) = \tilde{\gamma}(x)$.

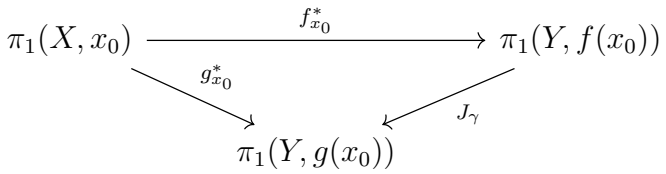
□

Man schreibt für f^*, das auf $\pi_1(X, x_0)$ wirkt, auch $f^*_{x_0}$. Also $f^*([\gamma]) = f^*_{x_0}([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ für $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ und $[\gamma] = [\gamma]_{\sim_{\{0,1\}}}$.

Satz 11.33. *Es seien $f, g\colon X \to Y, h\colon X \times I \to Y$, sodass $f \sim_h g$. Es sei $x_0 \in X, \gamma(t) := h(x_0, 1-t)$[1], dann ist $\gamma\colon I \to Y$, sodass $\gamma(0) = g(x_0), \gamma(1) = f(x_0)$. Dann ist:*

$$g^*_{x_0} = J_\gamma \circ f^*_{x_0}$$

Mit anderen Worten: Das Diagramm



kommutiert.

Beweis: Es sei $\sigma \in \Omega(X, x_0) = \{\gamma \in C(I, X) \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$. Wir behaupten, dass für $\sigma \in \Omega(X, x_0)$,

$$g^*([\sigma]) := [g \circ \sigma] = (J_\gamma \circ f^*)([\sigma]) = [\overline{\gamma} * (f \circ \sigma) * \gamma]$$

Wir basteln uns die Homotopie k.

$$\gamma_t(s) := \gamma(t + s(1-t))$$

$$k_t := \overline{\gamma_t} * (h_t \circ \sigma) * \gamma_t$$

Dann ist $k\colon I \times I \to Y$ stetig und $k_1 = g \circ \sigma, k_0 = \overline{\gamma} * (f \circ \sigma) * \gamma$. □

Lemma 11.34. *Es sei $\gamma\colon I \to X, \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_0$[2], $f\colon X \to Y$. Dann gilt:*

$$f^*_{x_1} \circ J_\gamma = J_{f\circ\gamma} \circ f^*_{x_0}$$

[1] Ich danke Frau Bach für den Hinweis, das in der Version des Skripted vom 1. Juli γ falsch herum ging. Wir schreiben hier $1-t$ (vor dem 1. Juli stand hier t), dann dreht sich alles um.

[2] Wieder Danke an Frau Bach.

Beweis: Es sei $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*_{x_1} \circ J_\gamma([\sigma]) &= f^*_{x_1}([\overline{\gamma} * \sigma * \gamma]) \\ &= [f \circ (\overline{\gamma} * \sigma * \gamma)] \\ &= [(f \circ \overline{\gamma}) * (f \circ \sigma) * (f \circ \gamma)] \\ &= [(\overline{f \circ \gamma}) * (f \circ \sigma) * (f \circ \gamma)] \\ &= J_{f\circ\gamma}([f \circ \sigma]) \\ &= J_{f\circ\gamma} \circ f^*_{x_0}([\sigma]). \end{aligned}$$

□

Satz 11.35. *Es sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann gilt für alle $x_0 \in X$, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} f^*_{x_0} : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

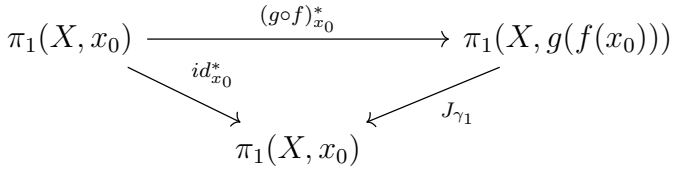
ein Gruppenisomorphismus ist.

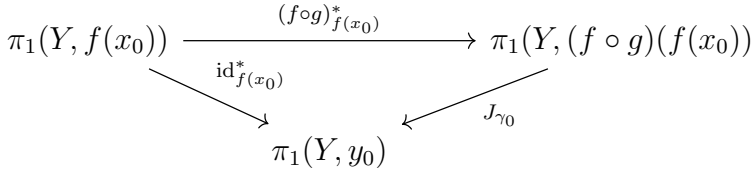
Beweis: Es sei $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g \sim_k \mathrm{id}_Y, g \circ f \sim_h \mathrm{id}_X$. Dann ist $\gamma_0(t) = k(f(x_0)), t)$ ein Weg von $f(g(f(x_0)))$ nach $f(x_0)$. Weiterhin ist $\gamma_1(t) = h(x_0, 1-t)$ ein Weg von $g(f(x_0))$ nach x_0.

Die Abbildung ist ein Homomorphismus, denn $f \circ \epsilon_{x_0} = \epsilon_{f(x_0)}$. Weiterhin gilt

$$f^*_{x_0}([\gamma * \gamma']) = [f \circ (\gamma * \gamma')] = [f \circ \gamma * f \circ \gamma'] = f^*_{x_0}([\gamma]) * f^*_{x_0}([\gamma']).$$

Die Abbildung ist injektiv, da $(g\circ f)^*_{x_0} = g^*_{f(x_0)} f^*_{x_0} = J_{\gamma_1}$ und letzte Abbildung bijektiv ist. Die Abbildung ist surjektiv, da $(f\circ g)^*_{f(x_0)} = f^*_{g(f(x_0))} \circ g^*_{f(x_0)} = J_{\gamma_0}$ und letzte Abbildung surjektiv ist. In Diagrammen:





□

Jeder zusammenziehbare Raum hat also die einelementige Fundamentalgruppe.

11.3 Lokale Produkte und Überlagerungen

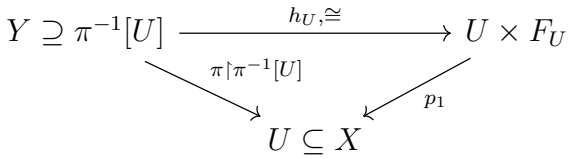
Definition 11.36. Es sei $\pi\colon Y \to X$ stetig. π heißt lokales Produkt/lokale Faserung, wenn

$$\forall x \in X \exists U \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{O}\ \exists F_U \neq \emptyset \text{ top. Raum}$$
$$\exists h_U\colon \pi^{-1}[U] \xrightarrow{\cong} U \times F_U\ (p_1 \circ h_U = \pi \restriction \pi^{-1}[U]).$$

Es sei $\pi\colon Y \to X$ stetig. π heißt lokale Überlagerung, wenn

$$\forall x \in X \exists U \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{O}\ \exists F_U \neq \emptyset \text{ diskr. top. Raum}$$
$$\exists h_U\colon \pi^{-1}[U] \xrightarrow{\cong} U \times F_U\ (p_1 \circ h_U = \pi \restriction \pi^{-1}[U]).$$

Das heißt: Das Diagramm



kommutiert.
$F_x := \pi^{-1}[\{x\}] \subseteq Y$ heißt Faser von π über x.

Definition 11.37. Ein lokales Produkt heißt globales (oder triviales) Produkt, wenn ein einziges F, h und somit stets $U = X$ gewählt werden kann.

Bemerkung 11.38. $h_U \restriction F_x$ ist ein Homömorphismus $F_x \cong \{x\} \times F_U$.

Lemma 11.39. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt und X zusammenhängend. Dann sind je zwei Fasern von π homöomorph.*

Beweis: Es sei $x_0 \in X, V_0 = \{x \in X \mid F_x \cong F_{x_0}\}$ sowie $V_1 = X \setminus V_0$. V_0 ist offen, da π ein lokales Produkt ist, da jede Umgebung von x, die wie im lokalen Produkt ist, für alle $x' \in U$ $F_{x'} \cong F_x$ erfüllt und somit $F_x \cong F_{x_0}$ gilt. Es gilt, dass

$$V_1 = \bigcup_{y \in X : F_y \ncong F_{x_0}} \{x \in X \mid F_x \cong F_y\}$$

Da jedes $\{x \in X \mid F_x \cong F_y\}$ offen ist, ist V_1 offen. Da X zusammenhängend ist und $x_0 \in V_0$, ist $V_1 = \emptyset$. □

Beispiele 11.40.

1. $\pi = p_1 \colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ ist offensichtlich ein globales Produkt, da $h = \mathrm{id}$ gewählt werden kann.

2. Es sei $M = {}^{[0,1]\times[0,1]}/_{\sim}$ mit $(0,x) \sim (1,1-x)$ das Möbiusband und

   $$\begin{aligned} \pi \colon M &\to S^1 \\ [x,y] &\longmapsto {}^{[x]}/_{\{0,1\}} \end{aligned}$$

   π ist ein lokales, aber kein globales Produkt.

   $$\pi^{-1}[{}^{[x]}/_{\{0,1\}}] = \{[x,y] \mid y \in [0,1]\}$$

   Jede Faser ist also homöomorph zu $[0,1]$. "π ist global" hieße, dass

   $$M \cong S^1 \times [0,1],$$

   in diesem Falle wäre das Möbiusband also nicht verdreht.

3. $\pi \colon O(n) \to {}^{O(n)}/_{O(k)\times O(n-k)} \cong G(n,k)$ ist ein lokales Produkt mit Faser $O(k) \times O(n-k)$.

4. $\pi \colon S^3 \to {}^{S^3}/_{\sim} \cong S^2$, mit $v \sim w :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in S^1 : v = \lambda w$ ist ein lokales Produkt mit Faser S^1, aber nicht global, da in diesem Fall $S^3 \cong S^2 \times S^1$ wäre. Dies geht aber nicht, denn

   $$\pi_1(S^3) = \{e\},\ \pi_1(S^2 \times S^1) = \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^1) = \{e\} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

5. Es sei $Y = TS^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in S^2, \langle x,y\rangle = 0\}$. Es sei $\pi \colon Y \to S^2$ definiert durch $\pi(x,y) = x$. Dann ist π ein lokales Produkt mit Faser $\mathbb{R}^2$ und ist nicht global nach dem Satz vom Igel.

Lemma 11.41. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ stetig. Dann sind äquivalent:*

1. *π ist eine lokale Überlagerung.*
2. *Für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x sowie I nicht leer, sodass es für alle $i \in I$ eine offene Menge V_i gibt mit*
   (a) *$\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} V_i$*
   (b) *Für $i \neq j \in I$ ist $V_i \cap V_j = \emptyset$*
   (c) *$\forall i \in I \pi \restriction V_i\colon V_i \cong U$*

   In Formel:

$$\forall x \in X\ \exists U \in \mathscr{U}(x) \cap \mathscr{O}\ \exists I \neq \emptyset\ \forall i,j \in I \exists V_i \in \mathscr{O}\ (\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I} V_i \wedge (i \neq j \to V_i \cap V_j = \emptyset) \wedge \pi \restriction V_i\colon V_i \xrightarrow{\cong} U).$$

Beweis: Es gilt $\pi \restriction V_i = p_1 \restriction (U \times \{i\}) \circ h \restriction V_i$. Wenn jetzt U wie in (1) zu x gewählt ist, so ist $V_i := h^{-1}[U \times \{i\}]$ offen. □

Definition 11.42. Es sei X zusammenhängend und $\pi\colon Y \to X$ eine lokale Überlagerung, s.d. f.a. U $F_U \cong I, I$ diskret. $|I|$ heißt die Blätterzahl der Überlagerung.

Beispiele 11.43.
1. Es sei $\pi = \exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. π ist natürlich surjektiv. Weil für $y = x + 2i\pi$ gilt, dass $\exp(y) = \exp(x)$, hat π $\mathbb{Z}$-viele Blätter.
2. Es sei $\pi\colon \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$ definiert durch $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$. Hier ist die Blätterzahl wieder unendlich.
3. Es sei $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $h(t) = e^{2\pi i t}$. Erneut ist die Blätterzahl unendlich.
4. $G = \{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$ wirke auf S^n. Dann gilt ${}^{S^n}/_{\pm id} \cong \mathbb{R}P^n$. Es sei π die Projektion. Dann gilt $\pi(x) = x, -x$, also hat π zwei Blätter.
5. Es sei $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\pi_z\colon S^1 \to S^1$ definiert durch $\pi_z(x) = x^{2\pi i z}$. Dies ist eine Überlagerung mit Blätterzahl $\mathbb{Z}$.

$\cong$

Definition 11.44. Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt und sei $f\colon Z \to X$ stetig. Eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon Z \to Y$ heißt Hochhebung oder Lift von f nach Y, wenn $\pi \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \supseteq \pi^{-1}[U] & \xrightarrow[\cong]{h_U} & U \times F_U \\ & \searrow^{f} & \downarrow \pi & \swarrow_{p_1} & \\ & & X & & \end{array}$$

Proposition 11.45. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt. Es sei $f\colon Z \to X$ und zu f existiere ein Lift $\tilde{f}\colon Z \to Y$. Dann gilt:*

$$\forall z_0 \in Z\ \exists y_0 \in Y\ (\tilde{f}(z_0) = y_0, f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_*(\pi_1(Y, y_0)))$$

Beweis: Zuerst gilt $\pi \circ \tilde{f} = f$. Damit gilt auch $f_* = (\pi \circ \tilde{f})_* = \pi_* \circ \tilde{f}_*$, da $f_* = \pi_1(f)$ und π_1 ein kovarianter Funktor ist. Nun folgt:

$$f_*[\pi_1(Z, z_0)] = (\pi_* \circ \tilde{f}_*)[\pi_1(Z, z_0)] = \pi_*[\underbrace{\tilde{f}_*[\pi_1(Z, z_0)]}_{\subseteq \pi_1(Y, y_0)}] \subseteq \pi_*[\pi_1(Y, y_0)]$$

□

Wir zeigen nun, dass sich Wege stets hochheben lassen:

Satz 11.46. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ ein lokales Produkt, $\gamma\colon [0,1] \to X$ stetig, $\pi(y_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es ein $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, sodass $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Beweis: $\gamma\,[[0,1]] \subseteq X$ ist kompakt. Zu $x \in \gamma[[0,1]]$ suche eine offene Umgebung U_x von x wie in der Definition des lokalen Produktes. Nach Kompaktheit von $\gamma[[0,1]]$ gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U_1, ..., U_n$. Nach der Wahl der U_i gilt

$$\forall i \leq n\ \exists F_i = F_{U_i}, h_i\colon \pi^{-1}[U_i] \xrightarrow{\cong} U_i \times F_{U_i},\ p_1 \circ h_i = \pi \restriction \pi^{-1}[U_i]$$

Insbesondere können wir mit $t_0, ..., t_n$, $t_0 = 0, t_n = 1$, $t_i < t_{i+1}$ die U_i so wählen, dass $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subseteq U_{i+1}$.
Es gilt $h_1(y_0) = (\gamma(0), f_1)$ für irgendein $f_1 \in F_{U_1}$ und, da $\pi(y_0) = \gamma(0)$, gilt $p_1 \circ h_1(y_0) = \gamma(0)$. Es sei für $t \in [t_0, t_1]$

$$\tilde{\gamma}_1(t) := h_1^{-1}(\gamma(t), f_1).$$

$\tilde{\gamma}_1$ ist auf $[t_0, t_1]$ stetig. Weiterhin gilt

$$\tilde{\gamma}_1(t_1) = h_1^{-1}(\gamma(t_1), f_1) = h_2^{-1}(\gamma(t_1), f_2)$$

für ein $f_2 \in F_{U_2}$. Für $t \in [t_1, t_2]$ setzen wir

$$\tilde{\gamma}_2(t) = h_2^{-1}(\gamma(t), f_2)$$

nach ein paar weiteren Schritten sind wir fertig. Nun sei

$$\tilde{\gamma} = \bigcup_{i \leq n} \tilde{\gamma}_i$$

Dann ist $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to Y$ stetig, da die Verklebung endlich vieler stetiger Funktionen. Nach Konstruktion gilt für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ (i beliebig):

$$\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = p_1 \circ h_i(\tilde{\gamma}_i)(t) = p_1 \circ h_i \circ h_i^{-1}(\gamma(t), f_i) = p_1(\gamma(t), f_i) = \gamma(t).$$

□

Beispiel 11.47. Es sei $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$. π ist ein lokales Produkt. Wir setzen $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f(t)), f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 11.48. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $f\colon Z \to X$ stetig und sei Z zusammenhängend. Es sei $z_0 \in Z, y_0 \in \pi^{-1}[\{f(z_0)\}]$. Dann gibt es höchstens eine Hochhebung $\tilde{f}\colon Z \to Y$, sodass $\pi \circ \tilde{f} = f, \tilde{f}(z_0) = y_0$.*

Beweis: Es seien $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ beides Hochhebungen von f, sodass $\tilde{f}_i(z_0) = y_0, i = 1, 2$. Es sei

$$A = \{z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\},\ A' = Z \setminus A$$

A ist nichtleer, da $z_0 \in A$. Weiterhin sind A und A' offen: Es sei $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$. Da $f(z) \in X$, gibt es eine offene Umgebung U und es gibt $I, U_i, i \in I$, sodass

$$\pi^{-1}[U] = \bigcup_{i \in I} U_i$$

und $\pi \restriction U_i \cong U$. Dann ist für $z_1 \in V = \tilde{f}_1^{-1}[U_i] \cap \tilde{f}_2^{-1}[U_i]$:

$$\pi \circ \tilde{f}_1(z_1) = f(z_1) = \pi \circ \tilde{f}_2(z_1)$$

und damit ist auch $\tilde{f}_1(z_1) = \tilde{f}_2(z_1)$, da $\pi \restriction U_i$ injektiv ist. Also ist $V \subseteq A$. Der Beweis für die Offenheit von A' ist ähnlich. Da Z zusammenhängend ist, ist $A' = \emptyset$ und $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. □

Definition 11.49. Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Wir sagen $U \subseteq X$ hat die Überlagerungseigenschaft, falls folgendes gilt:

1. U ist offen.
2. Es gibt ein diskretes D und $D' \subseteq D$, sodass $\pi^{-1}[U] = \bigcup_{d\in D'} V_d$ und die V_d offen und paarweise disjunkt sind.
3. Für alle $d \in D'$ ist $\pi \restriction V_d\colon V_d \xrightarrow{\cong} U$.

Satz 11.50. *Es sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, X zusammenhängend. Es seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to X$ Wege von x_0 nach y_0, die $\{0,1\}$-homotop sind via H. Es sei $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$. Dann gibt es eine eindeutige Hochhebung $\tilde{H}\colon [0,1]\times[0,1] \to Y$ und eindeutige Wege $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$, sodass*

1. *$\pi \circ \tilde{H} = H$.*
2. *$\pi \circ \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$.*
3. *$\pi \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$.*
4. *$\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x_0}$, $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$.*
5. *$\tilde{H}(s,0) = \tilde{\gamma}_0(s)$, $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\gamma}_1(s)$.*
6. *Für alle $t \in [0,1]$ ist $\tilde{H}(0,t) = \tilde{\gamma}_0(0)$ sowie $\tilde{H}(1,t) = \tilde{\gamma}_0(1)$.*

Falls $x_0 = y_0$, so ist nicht unbedingt $\tilde{x_0} = \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$.

Beweis: Wir zeigen die Existenz, die Eindeutigkeit folgt dann aus Satz 11.48.

Wir wählen zuerst $N, M \in \mathbb{N}$ sowie $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = 1$ sowie $(U_{i,j})_{1\le i\le N, 1\le j\le M}$, sodass mit

$$Q_{i,j} := [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1,t_j}]\ 1 \le i \le N, 1 \le j \le M$$

gilt, dass $H[Q_{i,j}] \subseteq U_{i,j}$ und $U_{i,j}$ die Überlagerungseigenschaft hat. Das heißt, es gibt ein diskretes $D_{i,j}$ und $D'_{i,j} \subseteq D$, sodass $\pi^{-1}[U_{i,j}] = \bigcup_{d\in D'_{i,j}} V_d^{i,j}$ und die $V_d^{i,j}$ offen, paarweise disjunkt und jeweils via π zu $U_{i,j}$ homöomorph sind.

Das ganze geht wegen der Kompaktheit (wie oben), indem wir zuerst für jedes $x \in H[[0,1]\times[0,1]]$ so ein U_x wählen, dann zu einer endlichen Teilüberdeckung übergehen und diese schließlich durch die Kästchen approximieren.

Nun sei $d_{1,1}$ so gewählt, dass $\tilde{x}_0 \in V^{1,1}_{d_{1,1}}$. Wir setzen für $(s,t) \in Q_{1,1}$:

$$\tilde{H}(s,t) = (\pi \restriction V^{1,1}_{d_{1,1}})^{-1}(H(s,t))$$

dies ist stetig, da π^{-1} stetig ist. Natürlich gilt $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$ und $\pi \circ (\tilde{H} \restriction Q_{1,1}) = H \restriction Q_{1,1}$. Nun setzen wir $\tilde{H}$ geeignet auf $Q_{1,2}$ fort. Dies geht so: Nach Voraussetzung gilt für $(s,t_1) \in Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$, dass $\pi(\tilde{H}(s,t_1)) = H(s,t_1) \in U_{1,2}$, also $\tilde{H}(s,t_1) \in V^{1,2}_{d_s}$ für ein $d_s \in D'_{1,2}$ ist. Allerdings gilt, dass die Funktion $s \mapsto \tilde{H}(s,t_1)$ stetig ist und somit ein zusammenhängendes Bild hat. Demnach müssen alle d_s gleich sein, wir nennen sie $d_{1,2}$. Es gilt somit für alle $(s,t_1) \in Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$:

$$\tilde{H}(s,t_1) = (\pi \restriction V^{1,2}_{d_{1,2}})^{-1}(H(s,t_1))$$

denn $\tilde{H}(s,t_1) \in V^{1,2}_{d_{1,2}}$ und $\pi(\tilde{H}(s,t_1)) = H(s,t_1)$ (und π ist, eingeschränkt auf $V^{1,2}_{d_{1,2}}$, ein Isomorphismus). Nun setzen wir für $(s,t) \in Q_{1,2}$:

$$\tilde{H}(s,t) = (\pi \restriction V^{1,2}_{d_{1,2}})^{-1}(H(s,t))$$

dies funktioniert nach unserer vorherigen Gleichung (auf dem gemeinsamen Definitionsbereich stimmen beide Funktionen schon überein).

So machen wir weiter und füllen in $N \cdot M$ Schritten ganz $[0,1] \times [0,1]$ aus.

Wir müssen noch zeigen, dass $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ ist. Nach Voraussetzung ist $\pi \circ \tilde{H}[\{0\} \times [0,1]] = \{x_0\}$. Damit gilt $\tilde{H}[\{0\} \times [0,1]] \subseteq \pi^{-1}[\{x_0\}]$. Allerdings ist $[0,1] \times \{0\}$ zusammenhängend und $\pi^{-1}[\{x_0\}]$ diskret. Also ist $\tilde{H}[\{0\} \times [0,1]]$ eine Einpunktmenge, welche nach Voraussetzung genau $\{\tilde{x}_0\}$ ist. Für $\pi \circ \tilde{H}[\{1\} \times [0,1]] = \{y_0\}$ verfährt man genauso. □

Korollar 11.51. *Es sei $\pi \colon Y \to X$ eine Überlagerung, X zusammenhängend. Es sei $\tilde{\gamma} \colon [0,1] \to Y$ ein Weg, sodass $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$ und*

$$(\pi \circ \tilde{\gamma})(0) = (\pi \circ \tilde{\gamma})(1) = x_0 \in X$$

Dann ist

$$[\pi \circ \tilde{\gamma}] \neq [\epsilon_{x_0}]$$

Beweis: Wir nehmen an, dass $H \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ eine $\{0,1\}$-Homotopie von $\pi \circ \gamma$ nach ϵ_{x_0} wäre. Es sei $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}[\{x_0\}]$ und $\tilde{H} \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ die eindeutige Hochhebung, sodass $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$. Da $\tilde{H}$ eine

$\{0,1\}$-Homotopie ist und $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\epsilon}_{x_0}(s) = \tilde{x}_0$, ist insbesondere $\tilde{H}(0,t) = \tilde{x}_0, \tilde{H}(1,t) = \tilde{x}_0$. Damit gilt

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{x_0} = \tilde{H}(1,0) = \tilde{\gamma}(1)$$

ein Widerspruch. □

Korollar 11.52.

$$(\pi_1(S^1, x_0), x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

Beweis: Es gilt $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (bzgl. der von der Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ erzeugten Bahnenäquivalenzrelation, also $r \sim r'$ gdw $\exists z \in \mathbb{Z}$, $r' = r + z$). $\mathbb{R}/\sim$ trägt die Quotiententopologie und ist homöomorph zu S^1. Da die Isomorphieklasse der Fundamentalgruppe unter Homöomorphismen invariant ist, reicht es also, mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zu arbeiten. Es sei weiterhin $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Projektion. Dies ist eine Überlagerung. Für $z \in \mathbb{Z}$ sei $\tilde{\gamma}_z(t) = tz \in \mathbb{R}$ sowie $\gamma_z = \pi \circ \tilde{\gamma}_z$. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi\colon (\mathbb{Z}, +) &\to \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0) \\ z &\longmapsto [\gamma_z] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

1. Ψ ist ein Homomorphismus: Es seien γ_n, γ_m Wege und $n \neq -m$. Dann gilt
$$\gamma_n * \gamma_m(t) = \begin{cases} \gamma_n(2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma_m(2t-1) & \text{für } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$
Es sei φ definiert durch
$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2tn}{n+m} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{(2t-1)m+n}{n+m} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$
dann ist φ stetig sowie $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. Damit gilt nach Lemma 11.17
$$[\gamma_{n+m}] = [\gamma_{n+m} \circ \varphi] = [\gamma_n * \gamma_m]$$
Im Falle $n = -m$ rechnet man von Hand nach, dass $[\gamma_n * \gamma_m] = \epsilon_{x_0}$.

2. Ψ ist injektiv: Da Ψ ein Homomorphismus ist, genügt zu zeigen, dass $\ker(\Psi) = \{0\}$. Es sei $z \neq 0$. Dann ist $\tilde{\gamma_z}(0) = 0 \neq z = \tilde{\gamma_z}(1)$ und damit ist $[\gamma_z] \neq [\epsilon_0]$.

3. Ψ ist surjektiv: Es sei $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0)$. Dann existiert ein $\tilde{\gamma}$ mit $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Dann ist $\tilde{\gamma}(1) = z \in \mathbb{Z}$, da $\pi \circ \tilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = 0$. Wir behaupten, dass $[\gamma] = [\gamma_z]$. Definiere

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, H(s,t) = \tilde{\gamma}(s)t + \tilde{\gamma}_z(s)(1-t).$$

Dann ist H eine $\{0,1\}$-Homotopie zwischen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}_z$ und $\pi \circ H$ ist eine $\{0,1\}$-Homotopie von γ und γ_z.

□

Wir benutzen also für die Surjektivität, dass je zwei Wege in $\mathbb{R}$ homotop sind. Überlagerungen $\pi\colon Y \to X$ mit so einem Y heißen universell.

11.4 Retraktionen

Definition 11.53. Es sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. $r\colon X \to A$ heißt Retraktion, wenn r stetig ist und $r \restriction A = \mathrm{id}_A$.

Korollar 11.54. *Es gibt keine Retraktion von $\overline{B^2}$ auf S^1.*

Beweis: Angenommen, $r\colon \overline{B^2} \to S^1$ sei eine Retraktion, dann ist $r \circ i = id_{S^1}$ (wobei i die Inklusionsabbildung bezeichnet). Dann ist insbesondere

$$(id_{S^1})_{x_0,*} = id_{\pi_1(S^1,x_0)} = (r \circ i)_* = r_{*,i(x_0)} \circ i_{*,x_0}.$$

Damit wäre insbesondere $r_{*,i(x_0)}\colon \pi_1(\overline{B^2}, i(x_0)) \to \pi_1(S^1, x_0)$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus (siehe auch Proposition 11.45). Aber $(\overline{B^2}, x_0)$ hat eine triviale Fundamentalgruppe, da $\overline{B^2}$ zusammenziehbar ist. □

Korollar 11.55 (Der Brouwer'sche Fixpunktsatz in Dimension 2)**.** *Es sei $f\colon \overline{B^2} \to \overline{B^2}$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. $\exists x \in \overline{B^2}\ f(x) = x$.*

Beweis: Es sei die Behauptung falsch und f stetig ohne Fixpunkt. Dann ist $\forall x \in \overline{B^2}\ f(x) - x \neq 0$. Es sei

$$A(x) = |x - f(x)|^2,\ B(x) = \langle x - f(x), x\rangle,\ C(x) = |x|^2 - 1.$$

A, B und C sind stetig. Es sei $t\colon \overline{B^2} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$t(x) = \frac{-B(x) + \sqrt{B(x)^2 - A(x)C(x)})}{A(x)}$$

t ist stetig, da $A(x) \neq 0$ für alle $x \in \overline{B^2}$ und

$$B(x)^2 - A(x)C(x) = \langle x - f(x), x\rangle^2 - \langle x - f(x), x - f(x)\rangle(|x|^2 - 1).$$

Wenn $x \in S^1$, dann folgt $C(x) = 0$ und damit $t(x) = 0$. Es sei nun $r\colon \overline{B^2} \to S^1$ definiert durch

$$r(x) = x + t(x)(x - f(x))$$

Dann ist r eine Retraktion: r ist offensichtlich stetig. Weiterhin gilt:

1. $r \restriction S^1 = \mathrm{id}_{S^1}$, da $t(x) = 0$ für $x \in S^1$.
2. Es sei $x \in \overline{B^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|r(x)|^2 &= |x|^2 + t^2(x)|x - f(x)|^2 + 2t(x)\langle x, x - f(x)\rangle \\
&= C(x) + 1 + t^2(x)A(x) + 2t(x)B(x) \\
&= C(x) + 1 + \frac{B^2(x) + B^2(x) - A(x)C(x) - 2B(x)\sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)}}{A(x)} \\
&\quad + 2\frac{-B^2(x) + B(x)\sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)}}{A(x)} \\
&= C(x) + 1 \\
&+ \frac{B^2(x) - B^2(x) + (-2B(x) + 2B(x))\sqrt{B^2(x) - A(x)C(x)} - A(x)C(x)}{A(x)} \\
&= C(x) + 1 - C(x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Satz 11.56 (Der Satz von Borsuk-Ulam)**.** *Es sei $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es ein $x \in S^2$, sodass $f(x) = f(-x)$.*

Beweis: Es sei dem nicht so. Dann ist G, definiert durch

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

stetig. Weiterhin ist $G\colon S^2 \to S^1$ und es gilt $G(-x) = -G(x)$. Wir betrachten den Weg $\gamma\colon [0, 1] \to S^2$, definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir drehen S^1 so, dass $G(\gamma(0)) = 1$. Setzen wir $g := G \circ \gamma$, so ist $G_*([\gamma]) = [g] \in \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Weiterhin gilt für $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$g\left(t + \frac{1}{2}\right) = G\left(\begin{pmatrix}\cos(2\pi t + \pi)\\ \sin(2\pi t + \pi)\\ 0\end{pmatrix}\right) = G(-\gamma(t)) = -G(\gamma(t)) = -g(t).$$

Wir nehmen die Überlagerung $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definiert durch $\pi(r) = [r]$. $\tilde{g}$ sei irgendeine Hochhebung von g nach $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\tilde{g}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

denn $\pi \circ \tilde{g}(t) = e^{2\pi i \tilde{g}(t)} = g(t)$ und $g(t + \frac{1}{2}) = e^{2\pi i \tilde{g}(t+\frac{1}{2}} = e^{2\pi i \tilde{g}(t)+\pi i} = -g(t)$. Also gibt es für jedes $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ein $q_t \in \mathbb{Z}$, sodass $\tilde{g}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{g}(t) = q_t + \frac{1}{2}$. Da die Abbildung $t \mapsto q_t$ stetig ist, ist sie konstant (mit Wert q). Also haben wir insbesondere

$$\tilde{g}(1) = \tilde{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \tilde{g}\left(0 + \frac{1}{2}\right) + q + \frac{1}{2} = 2q + 1 + \tilde{g}(0).$$

Insgesamt ist $[g]$ gleich der q-fachen Addition eines Generators von $\pi_1(S^1)$ und, da q ungerade ist, nichttrivial. Aber $g = G \circ \gamma$ und γ ist im Raum S^2 homotop zu ϵ_1, also ist nach Proposition 11.45 $g = G^*([\gamma])$ ebenfalls homotop zu ϵ_1 in S^1, ein Widerspruch. □

11.5 Das freie Produkt

Es seien Gruppe $G_i = (G_i, \circ_i, e_i)$ für $i \in I$ gegeben. Das freie Produkt

$$(\bigstar_{i\in I} G_i, \circ)$$

ist die folgende Gruppe:

1. $\bigstar_{i\in I} G_i$ ist die Menge aller gekürzten Wörter aus $\bigcup_{i\in I} G_i$, d.h.

   $$k = k_0, ..., k_l$$

   wobei benachbarte Buchstaben nicht aus der selben Gruppe kommen und kein Buchstabe e_i ist.

2. Die Verknüpfung ist definiert durch Hintereinanderschreiben der Wörter, wobei danach gekürzt wird. Kürzen heißt: Je zwei hintereinanderstehende Buchstaben aus derselben Gruppe werden verknüpft nach ihrem Gruppengesetz, das Ergebnis wird hingeschrieben. Falls dieses e_i ist, wird es weggelassen.

3. Das neutrale Element ist das leere Wort, das Inverse von $k = (k_0, ..., k_l)$ ist
$$k^{-1} := k_l^{-1}, ..., k_0^{-1}$$

Lemma 11.57. *Die Kürzung jedes Wortes ist eindeutig.*

Beweis: Induktiv über die Länge der Umformungskette. Es sei w gegeben. Wir kürzen w und erhalten w_1 und womöglich w_2. Wir schreiben die Kurzungsschritte fuer w_1 in umgekehrter Reihenfolge, bis wir zu w gelangen, dann die Kürzungsschritte von w zu w_2. Wir erhalten also eine Wortkette $w_1, v_0, \dots v_{\ell-1}, w, u_0, \dots u_{k-1}, w_2$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$.

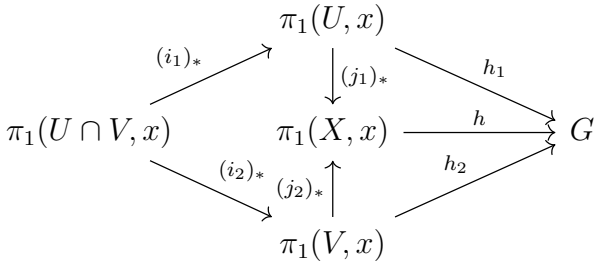
Wir nehmen an, dass $\ell \neq 0$. Dann ist $k \neq 0$.

1. Fall: Von w auf $v_{\ell-1}$ und von w auf u_0 wurde an überschneidungsfreien stellen gekürzt. Dann können wir beide Kürzungen in ein neues Wort u eintragen und $v_{\ell-1}$, w, u_0 durch u ersetzen und entsprechend die fehlende Kürzung auf der linken und auf der rechten Seite eintragen. Jede dieser beiden Seiten wird sich dann an der Klebestelle vielleicht noch einmal um einen Schritt verkürzen. Insgesamt erhalten wir eine kürzere Kette.

2. Fall: Von w auf $v_{\ell-1}$ und von w auf u_0 wurde an sich überschneidenen Stellen gekürzt. Dann können wir nach dem Assoziativgesetz für diese Gruppe beide Kürzungen in ein neues Wort u eintragen und $v_{\ell-1}$, w, u_0 durch u ersetzen und entsprechend die fehlende Kürzung auf der linken und auf der rechten Seite eintragen. Es geht weiter wie oben.

Insgesamt erhalten wir $\ell = k = 0$ und $w_1 = w_2$. □

Satz 11.58 (Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen)**.** *Es seien U, V topologische Räume, $X = U \cup V$ und U und V seien offen. Es sei $x_0 \in U \cap V \neq \emptyset$ und $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist ein homomorphes Bild von $\pi_1(U, x_0) \star \pi_1(V, x_0)$. Falls $U \cap V$ zusammenziehbar ist, so ist die Homomorphie eine Isomorphie.*



Es seien i_1, i_2, j_1, j_2 die Inklusionen. Dann gilt: Falls $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$, dann gibt es genau einen Homomorphismus h, sodass $h_1 = h \circ (j_1)_*, h_2 = h \circ (j_2)_*$.

Beweis: Beweisskizze: $(i_U)_* \colon \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ nach 11.45. Ebenson $(i_V)^*$. Durch Hintereinandergehen von Wegen erhält man einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(U, x_0) \star \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Für die Injektivität arbeitet man ähnlich wie im Hochhebungssatz. □

Dies sagt aus, dass die Gruppe $\pi_1(X, x)$ das "Amalgamierte Produkt" von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$ über $\pi_1(U \cap V, x)$ ist. Dieses ist das freie Produkt von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$, modulo des durch $\pi_1(U \cap V, x)$ erzeugten Normalteilers Insbesondere ist $\pi_1(X, x)$ das freie Produkt von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$, falls $\pi_1(U \cap V, x)$ trivial ist.

Beispiel 11.59. Es seien U, V wie im Satz von Seifert-van Kampen. Es sei $\pi_1(U \cap V, x) = \{0\}$ und G das freie Produkt von $\pi_1(U, x)$ und $\pi_1(V, x)$. Die Abbildungen h_1 und h_2 seien jeweils die natürlichen Einbettungen, das ein Gruppenelement auf das einelementige Wort, welches genau das Element enthält, abbildet. da $\pi_1(U \cap V, x)$ trivial ist, gilt natürlich $h_1 \circ (i_1)_* = h_2 \circ (i_2)_*$. Insofern gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung h von $\pi_1(X, x)$ nach G, sodass $h_1 = h \circ j_1$, $h_2 = h \circ j_2$.

Beispiel 11.60. [Ein Spezialfall des Satzes von Seifert van Kampen] Es seien $X = U \cup V$ und U, V offen in X und jeweils wegzusammenhängend und zusammenziehbar. Falls $U \cap V$ nicht leer und wegzusammenhängend ist, so ist X zusammenziehbar.

Beweis: X ist wegzusammenhängend. Wir zeigen, dass sich jede Schleife in X zusammenziehen lässt. Es sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $x_0 \in U \cap V$. Nach der Kompaktheit von $[0, 1]$ gibt es eine Einteilung $0 = a_0 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ sodass $\gamma \restriction [a_i, a_{i+1}]$ ganz in U oder ganz in V liegt. Wir laufen nach $\gamma \restriction [a_i, a_{i+1}]$ von

$\gamma(a_{i+1})$ zu x_0 via δ_i zurück und dann wieder von x_0 zu $\gamma(a_{i+1})$ via δ_i^{-1}. Nun ist $\delta_{i-1}^{-1} * \gamma \restriction [a_i, a_{i+1}] * \delta_i \in \Omega(U, x_0)$ oder in $\Omega(V, x_0)$ und daher zusammenziehbar zu x_0. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\gamma =& \gamma \restriction [a_0, a_1] * \cdots * \gamma \restriction [a_{n-1}, a_n] \\ &= \gamma \restriction [a_0, a_1] * \delta_0^{-1} * \delta_0 * \gamma \restriction [a_1, a_2] * \delta_1 * \cdots * \gamma \restriction [a_{n-1}, a_n]\end{aligned}$$

und sehen, dass γ zusammenziehbar ist: Für $\gamma(a_i) \in U \cap V$ gibt es einen Weg δ_{i-1} in $U \cap V$ nach x_0, da $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. □

Beispiel 11.61. Die Einpunkt-Kompaktifizierung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, nämlich $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ mit der Topologie von $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Umgebungsbasis $\{\{\infty\} \cup \mathbb{R}^n \setminus K : K \subseteq \mathbb{R}^n, K \text{ kompakt}\}$ ist homöomorph zur n-dimensionalen Einheitssphäre $S^n = \{x = (x_0, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i = 1\}$ durch die stereografische Projektion

$$\begin{aligned}\psi \colon S^n &\to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\mapsto \begin{cases} (\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0}) & \text{falls } x_0 \neq 1; \\ \infty & \text{falls } x_0 = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

mit Inverse

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(\infty) &= (1, 0, \dots 0), \\ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \cdot (z_0, \dots z_n) \text{ für } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}z_0 &= -1 + \sum_{i=1}^n y_i^2, \\ z_i &= 2y_i \text{ für } i = 1, \dots n.\end{aligned}$$

Korollar 11.62. *Es sei $n \geq 2$. Dann ist für jedes $x \in S^n$, $\pi_1(S^n, x)$ die Einpunktgruppe.*

Beweis: Es sei $x \in S^n$ sowie $x_0, x_1 \in S^n$ verschieden und verschieden von x. Dann gilt $S^n = (S^n \setminus \{x_0\}) \cup (S^n \setminus \{x_1\})$ und $(S^n \setminus \{x_0\}) \cap (S^n \setminus \{x_1\})$ ist wegzusammenhängend. Hier nutzen wir $n \geq 2$. Wir halten fest, dass $\pi_1(S^n \setminus \{x_0\}, x) = \pi_1(S^n \setminus \{x_1\}, x) = \{0\}$ ist, denn $S^n \setminus \{x_i\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^{n-1}$, welches zusammenziehbar ist. Nach Beispiel 11.60 ist (S^n, x_0) zusammenziehbar. □

Satz 11.63 (Der Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.*

Beweis: es sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ normiert. Wir nehmen an, dass P keine Nullstelle hat. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ vermöge der Abbildung $c = re^{i\theta} \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Für jedes $r \geq 0$ aus $\mathbb{R}$ sei $\alpha_r \colon I \to S^1$ der Weg

$$s \mapsto \frac{P(r \cdot e^{2\pi i s})}{|P(r \cdot e^{2\pi i s})|}.$$

Dann ist $\alpha_r \in \Omega(\mathbb{R}^2, (1,0))$.

Für jedes $r' \geq r \geq 0$ gibt es eine $\{0,1\}$-Homotopie zwischen α_r und $\alpha_{r'}$.

$$(s,t) \mapsto \frac{P((r + t(r'-r)) \cdot e^{2\pi i s})}{|P((r + t(r'-r)) \cdot e^{2\pi i s})|}.$$

Für $u \in [0,1]$ hat das Polynom $P_u = X^n + u(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + {}_0)$ hat keine Nullstelle auf dem Rand der Kugel mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r, wenn $r > \max\{1, u\sum_{i=1}^n |a_i|\}$. Es ist $P_1 = P$ und $P_0 = X^n$. Wir arbeiten nun mit einem so großen r. Wir setzen i $\alpha_{r,u} \colon I \to S^1$ der Weg

$$s \mapsto \frac{P_u(r \cdot e^{2\pi i s})}{|P_u(r \cdot e^{2\pi i s})|}.$$

Wiederum ist $\alpha_{r,u} \sim_{\{0,1\}} \alpha_{r,u'}$ via

$$(s,t) \mapsto \frac{t \cdot P_u(r \cdot e^{2\pi i s}) + (1-t) \cdot P_{u'}(r \cdot e^{2\pi i s})}{|t \cdot P_u(r \cdot e^{2\pi i s}) + (1-t) \cdot P_{u'}(r \cdot e^{2\pi i s})|}.$$

$\alpha_{r,1}$ ist also homotop zur Schleife $\alpha_{r,0}$, die wir mit P_0 gewinnen. Diese ist $\alpha_{r,0}(s) = (\cos(2\pi n s), \sin(2\pi n s))$. Somit ist $[\alpha_{r,0}] = *_n \text{ mal}[\beta]$ mit $\beta(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$. Da $[\alpha_{0,1}] = [\epsilon_{\frac{a_0}{|a_0|}}]$ folgt $n = 0$. Unser Polynom P hat also Grad 0, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass es nicht konstant ist. □

Kapitel 12

Dank

Ich danke Herrn Dr. Hannes Jakob und Herrn M.Sc. Patrick Meurin für die tatkräftige Mithilfe beim Schreiben eines LaTeX-Skripts der Vorlesung vom Sommersemester 2019. Ich danke Herrn Benedikt Heitz, Herrn Benedikt Kahle und Herrn Rodrigo Martín Orduña für Hinweise auf Fehler in früheren Fassungen des Skripts im Sommersemester 2025 und im Winter 2026. Ich danke Herrn Dr. Jakob für die Mitarbeit am Skript im Sommersemester 2025. Ich danke Herrn Schneider, Frau Bach und Frau Schliebitz für Hinweise.

Literaturverzeichnis

[1] Ryszard Engelking. *General topology.* Heldermann Verlag, second edition edition, 1989.

[2] J. D. Halpern and H. Läuchli. A partition theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 124:360–367, 1966.

[3] J. D. Halpern and A. Lévy. The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In *Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967)*, pages 83–134. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[4] Kazimierz Kuratowski. *Topology*, volume 1. Academic Press, 1966.

[5] James R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition of [MR0464128].

[6] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Hochschultext. [University Textbooks]. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1979.

Index

$B_\varepsilon(x)$, 12
G_δ-Menge, 55
K-Algebra, 65
$f|A$, 15
$f[A]$, 15
$f^{-1}[B]$, 15

Abbildung
    abgeschlossen, 16
    offen, 15
    stetig, 15
abgeschlossen, 10
Abschluss, 14
abzählbare Menge, 14
Abzählbarkeitsaxiom
    Erstes, 14
    Zweites, 14
Adjunktion, 26
Anheftung, 26

Bahn, 79
Bahnenraum, 80
Basis, 10
Basispunkt, 89
Berührungspunkt, 35, 38
Borduk-Ulam, 108

dicht
    nirgends, 14
dicht in Y, 14
diskret, 17
Dreiecksungleichung, 9

Einbettung, 18
Erzeugte Äquivalenzrelation, 77

Filter, 36
    fixiert, 37
    frei, 37
    Fréchet-, 37
Filterbasis, 36
Finaltopologie, 23
Fundamentalgruppe, 89
Funktor, 93

Gruppenoperation, 78
    transitiv, 79

Hausdorffraum, 41
homogener Raum, 83
homotop, 85
    geschlossen, 95
    relativ, 85
homotopieäquivalent, 86
Homotopieäquivalenz, 86
Homöomorphismus, 16
Häufungspunkt, 35

identifizierende Abbildung, 25

Initialtopologie, 21
Isotropiegruppe, 79

Kategorie, 92
kompakt, 59
Konvergenz, 35, 38

Lemma von Zorn, 37
lineare Ordnung, 13
lokal wegzusammenhängend, 31
lokal zusammenhängend, 31
lokale Überlagerung, 99
lokales Produkt, 99

Möbiusband, 26
Metrik, 9
Metrischer Raum, 9

Nachbarschaftsfilter, 71
normal, 42

offen, 10
Offenes Innere, 14
Orbit, 79

Partition, 42
Partitionstopologie, 42
Produktabbildung, 21
Produktmenge, 19
Produkttopologie, 20
Projektion, 20
Pseudometrik, 13

Quotientenabbildung, 23
Quotiententopologie, 24

regulär, 42

Schleife, 88
Sorgenfrey-Gerade, 13
Spurtopologie, 17
Standgruppe, 79
    Menge, 80
sternförmig, 88
Subbasis, 11
Summentopologie, 25
Supremumsmetrik, 65
symmetrische Relation, 71

T0-Raum, 41
T1-Raum, 41
T2-Raum, 41
T3-Raum, 41
T3a-Raum, 41
T4-Raum, 42
Topologie, 10
    Diskrete, 13
    Indiskrete, 13
    Kofinite, 13
    metrische, 12
    Ordnungs-, 13
    Standard-, 13
Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, 65
topologische Gruppe, 82
Topologischer Raum, 10
total unzusammenhängend, 31

Ultrafilter, 37
Umgebung, 14
Umgebungsbasis, 14
Umgebungsfilter, 36
Umgebungssystem, 14
uniforme Struktur, 71
uniformer Raum, 71
Universelle Überlagerung, 107
Unterraumtopologie, 17
Urysohn, 53

vollständig regulär, 42

Weg, 31
Wegzusammenhangskomponente, 32
wegzusammenhängend, 31
Zusammenfalten, 26
Zusammenhangskomponente, 31
zusammenhängend, 27
Zusammenklebung, 26
Zusammenschlagen, 26
zusammenziehbar, 87