BLATT 1

(20.04.2026)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem. Betrachten Sie folgende Eigenschaften:

(a) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist $A \cup B \in \mathcal{A}$.

(b) Für jede Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist $\bigcap \mathcal{B} := \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{B}\, (x \in A)\} \in \mathcal{A}$, wobei insbesondere $\bigcap \emptyset = X$ gilt.[1]

(c) $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$.

Beantworten Sie (mit Begründung) folgende Fragen:

1. Gegeben ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, das die Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt, gibt es eine Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ auf X, sodass $\mathcal{A}$ genau aus den abgeschlossenen Mengen bezüglich $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ besteht?
2. Gegeben sei nun eine Topologie $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Welche Eigenschaften von (a), (b) und (c) werden vom System der abgeschlossenen Mengen bezüglich $\mathcal{O}$ erfüllt?

Aufgabe 2 (4=2+1+1 Punkte)**.** Es sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig als

$$q = p^r \frac{a}{b}$$

mit $r, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, so dass p, a und b paarweise teilerfremd sind, schreiben. In diesem Fall definieren wir die *p-adische Bewertung* von q durch[2] $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die p-adische Metrik

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p$$

auf $\mathbb{Q}$ induziert.

1) Zeigen Sie, dass d_p wirklich eine Metrik ist, also die Eigenschaften 1. – 3. aus Definition 1.1 hat.

2) Zeigen Sie, dass die folgende verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x, y) \leq \max\{d_p(x, z), d_p(z, y)\}$$

Zeigen Sie zudem, dass eine strikte Ungleichung nur dann auftreten kann, wenn $d_p(x, z) = d_p(y, z)$ gilt.

Rückseite beachten!

[1] Der Operator $\mathcal{B} \mapsto \bigcap \mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ hängt auch von X ab, nämlich an der Stelle $\mathcal{B} = \emptyset$. Für die nichtleeren Argumente $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ braucht der Operator keine zusätzliche Angabe.

[2] Beachten Sie das Minus im Falle $q \neq 0$

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 28.04, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.

Für den hier betrachteten Raum Q mit der p-adischen Metrik definieren wir wie in Lemma 1.12 die *offenen ϵ-Umgebungen*, auch *offene ϵ-Bälle* genannt, $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x, y) < \epsilon\}$. Wichtig ist, dass diese Definition im allgemeinen Fall von der Metrik abhängt. Hier natürlich von der p-adischen.

3) Folgern Sie aus 2), dass für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ und alle $\epsilon, \delta > 0$ eine der folgenden Eigenschaften wahr ist: $B_\epsilon(x) \cap B_\delta(y) = \emptyset$ oder $B_\epsilon(x) \subseteq B_\delta(y)$ oder $B_\delta(y) \subseteq B_\epsilon(x)$.

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 28.04, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.