BLATT 2
(27.04.2026)

Aufgabe 1 (4=2+2 Punkte)**.** Es seien X eine unendliche Menge und $\mathscr{O}$ die kofinite Topologie auf X, d.h. $\mathscr{O} = \{X \setminus F : F \subseteq X, F \text{ endlich}\}$.

1. Es sei $A \subseteq X$. Wie sieht der Abschluss $\overline{A}$ von A in $(X, \mathscr{O})$ aus?

   Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung je nachdem, ob A endlich oder unendlich ist.

2. Geben Sie alle dichten Teilmengen von X bezüglich $\mathscr{O}$ an.

Aufgabe 2 (4=2+2 Punkte)**.** Es seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Mit $\overline{A}$ bezeichnen wir den Abschluss von A und mit $\mathring{A}$ bezeichnen wir das offene Innere von A.

1. Gilt
$$\overline{A} = \bigcap \{C \subseteq X \mid A \subseteq C \text{ und } C \text{ ist abgeschlossen}\}?$$

2. Gilt
$$\overline{X \setminus A} = X \setminus (\mathring{A})?$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien X eine nichtleere Menge und $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$,

(b) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$,

(c) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$,

(d) Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ ist $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$.

Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie $\mathscr{O}$ auf X gibt, sodass für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt, dass $\mathrm{cl}(A) = \overline{A}$, wobei $\overline{A}$ den Abschluss von A bezüglich $\mathscr{O}$ bezeichnet.

Rückseite beachten!

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 05.05, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine Menge $P \subseteq \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P\} .$$

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen*, wenn $\mathbb{C}_n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{O}_Z$ aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie*.

Hinweis: Überlegen Sie sich mit Hilfe von Blatt 1, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, folgendes zu zeigen:

(a) $\emptyset$ und $\mathbb{C}^n$ sind Zariski-abgeschlossen;

(b) wenn A, B Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A \cup B$ (betrachten Sie hierzu geeigenete Produkte der definierenden Polynome);

(c) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.