BLATT 3

(05.05.2026)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für $i \in I$ und $A_i \subseteq X_i$ Teilmengen. Es sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie ausgestattet.

(1) Gilt $\left(\prod_{i \in I} A_i\right)^\circ \subseteq \prod_{i \in I} \mathring{A}_i$?

(2) Gibt es ein Beispiel für $\left(\prod_{i \in I} A_i\right)^\circ \subsetneq \prod_{i \in I} \mathring{A}_i$? Wenn Sie die Aussage bejahen, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 2 (4=3+1 Punkte)**.** Für alle $i \in [0,1)$ und $j \in [0,1]$ mit $i \neq j$ seien die Funktionen

$$f_{i,j} : [0,1] \to [0,1],\ f_{i,j}(x) = \begin{cases} i, & x \leq i \\ j, & x > i \end{cases}$$

gegeben. Im Folgenden wollen wir zu diesen Funktionen Finaltopologien analysieren. Dazu betrachten wir die Standardtopologie $\mathscr{O}_<$ auf allen Urbildmengen.

(1) Wir betrachten in dieser Teilaufgabe die Finaltopologie $\mathscr{O}_1$ von $((f_{\frac{1}{2},j}\,, [0,1], \mathscr{O}_<)_{j \neq \frac{1}{2}}, [0,1])$[1].
Geben Sie eine Umgebungsbasis des Punktes $\frac{1}{2}$ in $\mathscr{O}_1$ an.

(2) Nun betrachten wir die Finaltopologie $\mathscr{O}_2$ von $((f_{i,j}\,, [0,1], \mathscr{O}_<)_{i \neq j}, [0,1])$[1].
Geben Sie mit Hilfe Ihrer Antwort auf Teil (1) alle Elemente der Topologie $\mathscr{O}_2$ an.

Aufgabe 3 (4=2+1+1 Punkte)**.** Wir betrachten nun den Raum $\prod_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie, die von der Standardtopologie $\mathscr{O}_<$ auf $\mathbb{R}$ gegeben wird.

(1) Geben Sie eine Umgebungsbasis von $\{(r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ an.

(2) Erfüllt der Raum eines der Abzählbarkeitsaxiome?

(3) Gibt es eine Metrik, die diese Produkttopologie induziert?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien (X_n, d_n) metrische Räume für $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Metrik d auf $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, so dass $\mathscr{O}_d$ mit der Produkttopologie der Räume $(X_n, \mathscr{O}_{d_n})$, $n \in \mathbb{N}$, übereinstimmt? Wenn Sie die Aussage bejahen, geben Sie so eine Metrik d auf dem Produktraum aus den $(X_n, \mathcal{O}_{d_n})$, $n \in \mathbb{N}$, in Abhängigkeit von d_n, $n \in \mathbb{N}$, an.

[1] Der Index j geht über das Intervall $[0,1]$ während der Index i über das Intervall $[0,1)$ geht, was hier zur besseren Lesbarkeit ausgelassen wurde.

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 12.05, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.