Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Simon Klemm

BLATT 4

(11.05.2026)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei die Abbildung $f : [0,1) \to \mathbb{C}$ durch $f(t) = e^{2\pi i t}$.

Ist f eine Einbettung?

Aufgabe 2 (4=2+1+1 Punkte)**.** Beantworten Sie folgende Fragen mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(1) Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume und $X := \prod_i X_i$ ausgestattet mit der Produkttopologie. Sind die Projektionsabbildungen $p_i \colon X \to X_i$, definiert durch $p_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$, offen?

(2) Es sei X eine Menge, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ ein topologischer Raum und $f \colon X \to Y$ injektiv. Die von f erzeugte initiale Topologie auf X ist

$$\mathscr{O}_{X,f} := \{f^{-1}[A] \mid A \in \mathscr{O}_Y\}.$$

Ist $f \colon (X, \mathscr{O}_{X,f}) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ offen?

(3) Ändert sich die Antwort auf Teilaufgabe (2), wenn f nicht mehr als injektiv angenommen wird?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie $\mathscr{O}_<$.

Gibt es eine stetige Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die injektiv ist?

Aufgabe 4 (4=2+2 Punkte)**.** Wir betrachten den topologischen Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Dabei besteht die Grundmenge X aus allen Funktionen $f \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, eine Basis der Topologie ist durch die Mengen $[s] := \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid s \sqsubset f\}$ gegeben, wobei für $s \colon \{0, \dots, n-1\} \to \{0,1\}$ gilt, dass $s \sqsubset f$ genau dann, wenn $f \restriction \{0, \dots, n-1\} = s$.

(1) Ist der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der angegebenen Topologie diskret? Ein Raum heißt diskret, wenn die Trägermenge diskret im Raum liegt. Man kan äquivalent auch sagen: Jede Einermenge ist offen.

(2) Ist der Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der angegebenen Topologie total unzusammenhängend?

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 19.05, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.