

BLATT 4
(15.05.2026)

Aufgabe 1 (4 Punkte). Gegeben sei die Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(t) = e^{2\pi it}$.
Ist f eine Einbettung?

Aufgabe 2 (4=2+1+1 Punkte). Beantworten Sie folgende Fragen mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

- (1) Es seien (X_i, \mathcal{O}_i) topologische Räume und $X := \prod_i X_i$ ausgestattet mit der Produkttopologie. Sind die Projektionsabbildungen $p_i : X \rightarrow X_i$, definiert durch $p_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$, offen?
- (2) Es sei X eine Menge, (Y, \mathcal{O}_Y) ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ **surjektiv**. Die von f erzeugte initiale Topologie auf X ist

$$\mathcal{O}_{X,f} := \{f^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{O}_Y\}.$$

Ist $f : (X, \mathcal{O}_{X,f}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ offen?

- (3) Ändert sich die Antwort auf Teilaufgabe (2), wenn f nicht mehr als **surjektiv** angenommen wird?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Wir betrachten \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 mit der Standardtopologie $\mathcal{O}_<$.
Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die injektiv ist?

Aufgabe 4 (4=2+2 Punkte). Wir betrachten den topologischen Raum $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Dabei besteht die Grundmenge X aus allen Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, eine Basis der Topologie ist durch die Mengen $[s] := \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid s \sqsubset f\}$ gegeben, wobei für $s : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt, dass $s \sqsubset f$ genau dann, wenn $f \upharpoonright \{0, \dots, n-1\} = s$.

- (1) Ist der Raum $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit der angegebenen Topologie diskret? Ein Raum heißt diskret, wenn die Trägermenge diskret im Raum liegt. Man kann äquivalent auch sagen: Jede Einermenge ist offen.
- (2) Ist der Raum $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit der angegebenen Topologie total unzusammenhängend?