Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Simon Klemm

BLATT 10 revidiert

(13.07.2026)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei X ein topologischer Raum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(2) Für jedes $x \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ trivial, d.h. sie ist die einelementige Gruppe.

(3) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ sind homotop.

Aufgabe 2 (4=2+2 Punkte)**.** Es sei X eine nichtleere Menge und $x \in X$. Auf X seien $\mathscr{O}_0$ die *indiskrete* (d.h. $\mathscr{O}_0 := \{\emptyset, X\}$) und $\mathscr{O}_1$ die *diskrete* (d.h. $\mathscr{O}_1 := \mathcal{P}(X)$) Topologie.

(1) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ bzgl. $\mathscr{O}_0$.

(2) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ bzgl. $\mathscr{O}_1$.

Definition. Seien X und Y topologische Räume. $C(X, Y)$ bezeichne die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Wir definieren eine Topologie auf $C(X, Y)$ wie folgt: Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und eine offene Teilmenge $O \subseteq Y$ definieren wir

$$U(K, O) := \{f \in C(X, Y) \mid f[K] \subseteq O\}$$

Die *kompakt-offene Topologie* auf $C(X, Y)$ wird erzeugt von der Subbasis

$$\mathscr{S} := \{U(K, O) \mid K \subseteq X \text{ kompakt}, O \subseteq Y \text{ offen}\}$$

Aufgabe 3 (8=1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte)**.** Seien X und Y topologische Räume.

(1) Ist Y ein Hausdorff-Raum, so ist $C(X, Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie ein Hausdorff-Raum.

(2) Ist X lokalkompakt und Hausdorff'sch, dann ist die Auswertungsabbildung $\epsilon\colon C(X, Y) \times X \to Y$, definiert durch $\epsilon(f, x) := f(x)$, stetig.

Rückseite beachten!

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 07.07, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Simon Klemm

Nun seien X, Y und Z topologische Räume. Die Mengen $C(X,Y)$, $C(X\times Y,Z)$ und $C(X,C(Y,Z))$ seien mit der jeweiligen kompakt-offenen Topologie ausgestattet (auf $X\times Y$ nehmen wir die Produkttopologie). Wir definieren die kanonische Abbildung h wie folgt:

$$\begin{aligned} h\colon C(X\times Y,Z) &\to C(X,C(Y,Z)) \\ f &\mapsto (x\mapsto (y\mapsto f(x,y))) \end{aligned}$$

Das heißt, $h(f)$ ist eine Abbildung von X nach $C(Y,Z)$, die x auf eine Abbildung von Y nach Z abbildet, welche wiederum y auf $f(x,y)$ abbildet. Überprüfen Sie:

(3) Sei $x\in X$. Ist $h(f)(x)\in C(Y,Z)$?

(4) Ist h wohldefiniert, d.h. für $f\in C(X\times Y,Z)$, ist $h(f)\in C(X,C(Y,Z))$?

(5) Ist h stetig?

(6) Ist h injektiv?

(7) Nun sei Y lokalkompakt und Hausdorff'sch. Ist h surjektiv?

(8) Nun sei X hausdorffsch und Y lokalkompakt und Hausdorff'sch. Ist h ein Homöomorphismus? Im bejahenden Fall spricht man von einem Exponentialgesetz (da in diesem Fall $Z^{X\times Y}\cong (Z^Y)^X$ wie man es von den Zahlen gewohnt ist).

Das einfachste Beispiel ist, dass die Menge aller Funktionen von $X\times Y$ nach Z in natürlicher Bijektion zur Menge aller Funktionen von X in die Menge aller Funktionen von Y nach Z steht.

Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 07.07, 10 Uhr.
Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.