Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Simon Klemm

**BLATT 11**

(06.07.2026)

Dies ist das letzte Blatt. Falls nicht explizit anders gefordert, sind ab nun alle Abbildungen stetig.

**Aufgabe 1** (4=2+2 Punkte)**.** Es sei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ die durch $\pi(t) = \Big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\Big)$ gegebene lokale Überdeckung der Sphäre $\mathbb{S}^1$.

Sei zudem $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ eine durch $f(z) = -z$ gegebene Abbildung.

(1) Zeigen Sie, dass sich $f \circ \pi$ liften lässt. Das heißt zeigen Sie, dass es eine Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ g = f \circ \pi$ gibt.

(2) Gibt es einen solchen Lift $g$, der $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ erfüllt?

**Aufgabe 2** (6=2+2+2 Punkte)**.** Sei $H$ eine endliche Gruppe mit der diskreten Topologie und $X$ ein topologischer Raum. Eine Operation (auch Wirkung genannt) von $H$ auf $X$ heißt stetig, wenn die Operation

$$H \times X \longrightarrow X, \qquad (h, x) \mapsto h \cdot x$$

bezüglich der Produkttopologie auf $H \times X$ stetig ist.

(1) Sei $X$ hausdorffsch und es gelte

$$\mathrm{Fix}_X(h) = \{x \in X \mid h \cdot x = x\} = \emptyset$$

für alle $h \neq 1_H$ in $H$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U$ von $x$ gibt, so dass

$$h_1 \cdot U \cap h_2 \cdot U = \emptyset$$

für alle $h_1 \neq h_2$ in $H$ gilt, wobei $h \cdot U = \{h \cdot u \mid u \in U\}$ gilt.

(2) Seien $X$ und $H$ wie in Teil (1). Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung

$$X \longrightarrow X/H$$

eine lokale Überlagerung ist. Dabei bezeichnet $X/H$ die Menge der $H$-Bahnen $H \cdot x = \{h \cdot x \mid h \in H\}$ von $X$, die wir mit der Quotiententopologie austatten.

(3) Folgern Sie: Ist $G$ eine topologische Gruppe, für die $\{1_G\}$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, und ist $H$ eine endliche Untergruppe von $G$, dann ist die Quotientenabbildung

$$G \longrightarrow G/H$$

eine Überlagerung. Dabei besteht $G/H$, das wieder mit der Quotiententopologie ausgestattet ist, aus den $H$-Bahnen der Elemente von $G$.

**Rückseite beachten!**

*Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 14.07.2026, 10 Uhr.*
*Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.*

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Simon Klemm

**Aufgabe 3** (6=2+2+2 Punkte)**.** Es sei $G$ eine topologische Gruppe und $X$ kompakt und hausdorffsch. Wir nehmen an, dass $G$ *stetig auf* $X$ *operiert*, d.h., dass die Operation von $G$ auf $X$ stetig ist (vgl. Aufgabe 2). Wir statten die Menge

$$H(X) := \{f\colon X \to X \mid f \text{ ist ein Homöomorphismus}\}$$

mit der kompakt-offenen Topologie aus (vgl. Blatt 10). Zeigen Sie:

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $f_g\colon X \to X$, $f_g(x) = gx$, in $H(X)$.
2. Die Abbildung $F\colon G \to H(X)$, definiert durch $F(g) = f_g$, ist stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie.

Entscheiden Sie:

3. Gibt es eine topologische Gruppe $G$, sodass $F$ bijektiv oder sogar ein Homöomorphismus ist?

*Abgabe in die Briefkästen 2.24 (Gruppe 1) bzw. 2.25 (Gruppe 2) im Keller des Mathematischen Instituts bis Dienstag, den 14.07.2026, 10 Uhr.*
*Beide Namen der Abgabepartner müssen auf das Blatt geschrieben werden.*