Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 0, Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.

Eine Menge oder eine Klasse A heißt *transitiv*, wenn $x \subseteq A$ für alle $x \in A$ (wenn also aus $x \in A$ und $y \in x$ sich $y \in A$ ergibt).

1. Ist $\emptyset$ transitiv?
2. Sei x transitiv und $y \subseteq x$. Ist dann $x \cup \{y\}$ transitiv?
3. Seien x und y transitiv. Man untersuche die Transitivität von $x \cap y$ und $x \cup y$. Sei A eine nicht leere Menge transitiver Mengen. Man untersuche $\bigcap A$ und $\bigcup A$ auf Transitivität hin.

Aufgabe 2.

1. Für welche $x \in \mathbf{V}$ ist $\{x\}$ ist transitiv?
2. Für welche x, y ist $\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}$ transitiv? Warum?

Aufgabe 3. Wir arbeiten in ZF ohne das Fundierungsaxiom. Die *kumulative Hierachie* ist durch transfinite Rekursion definiert:

$$\begin{aligned} V_0 &:= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \\ \mathbf{WF} &:= \bigcup\{V_\alpha \,:\, \alpha \in \mathrm{On}\}. \end{aligned}$$

Eine Menge $x \in \mathbf{WF}$ hat *Rang* α, wenn $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$. Wir schreiben $\mathrm{rk}(x) = \alpha$, wenn x Rang α hat.

1. Man zeige: für alle $y \in \mathbf{WF}$, $\mathrm{rk}(y) \in \mathbf{On}$ und $\mathrm{rk}(y) = \sup\{\mathrm{rk}(x) + 1 \,:\, x \in y\}$;[1]
2. berechnen Sie $\mathrm{rk}(\mathcal{P}(x))$,
3. berechnen Sie $\mathrm{rk}(\{x\})$,
4. berechnen Sie $\mathrm{rk}(x \times y)$,
5. berechnen Sie $\mathrm{rk}(\bigcup x)$.

Bemerkung: Das Fundierungsaxiom impliziert $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$.

Aufgabe 4. Gibt es eine Menge x, so dass $\mathbf{V} \setminus x$ eine Menge ist? Warum?
Gibt es eine echte Klasse K, so dass $\bigcup K$ eine Menge ist? Warum?

[1] Zur Erinnerung: Sei z eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\sup(z) = \bigcup z$ das Supremum von z, das in z oder oberhalb von z liegen kann. Vergleichen Sie $\bigcup z$ mit $\bigcup\{\alpha + 1 \,:\, \alpha \in z\}$, um sich die Wirkung der Verschiebung um 1 nach oben zu veranschaulichen.