Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 11

Abgabe am 15.01.2019 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Eine Forcinghalbordnung $\mathbb{P}$ heißt *separativ*, wenn

$$\forall p, q \in \mathbb{P}\ (p \not\leq q \to \exists r \leq p\ (r \perp q)).$$

Sei $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in \mathbb{P}\}$ der kanonische $\mathbb{P}$-Name des generischen Filters, und sei $\mathbb{P}$ separativ. Welche der folgenden Aussagen gelten:

i) $\forall p, q \in \mathbb{P}\ (p \leq q \Rightarrow p \Vdash \check{q} \in \Gamma)$?

ii) $\forall p, q \in \mathbb{P}\ (p \Vdash \check{q} \in \Gamma \Rightarrow p \leq q)$?

iii) Nun verzichten wir auf die Separativität. Gilt i) immer noch? Gilt ii) immer noch? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{P}$ eine Forcinghalbordnung. Für zwei Bedingungen $p, q \in \mathbb{P}$ definieren wir

$$p \approx q :\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{P}\ (r \perp p \leftrightarrow r \perp q).$$
$$[p]_\approx \leq_\approx [q]_\approx :\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{P}\ (r \perp q \to r \perp p).$$

Wir definieren eine Abbildung in den Quotienten $i : \mathbb{P} \to \mathbb{P}/\approx$ durch $i(p) := [p]_\approx$.

i) Ist $\leq_\approx$ wohldefiniert?

ii) Ist $(\mathbb{P}/\approx, \leq_\approx)$ separativ?

iii) Untersuchen Sie die Abbildung i auf folgende Eigenschaften hin:

- $p \leq q \Rightarrow i(p) \leq_\approx i(q)$,
- $p \leq q \Leftrightarrow i(p) \leq_\approx i(q)$,
- $p \perp q \Leftrightarrow i(p) \perp i(q)$,
- Das Bild von $\mathbb{P}$ unter der Abbildung i ist dicht in $\mathbb{P}/\approx$.

Aufgabe 3. Sei λ das Lebesguemaß auf dem reellen Intervall $[0, 1]$. Wir definieren

$$\mathbb{P} := \{a \subseteq [0, 1] : a \text{ Borel}, \lambda(a) > 0\}$$

zusammen mit der Ordnung $a \leq_\mathbb{P} b :\Leftrightarrow a \subseteq b$.

i) Ist $\mathbb{P}$ separativ?

ii) Wie sieht der separative Quotient von $\mathbb{P}$ aus? Geben Sie die Äquivalenzklassen $[a]_\approx$ für $a \in \mathbb{P}$ und $\leq_\approx$ explizit an.

Bitte schauen Sie auch die Rückseite an.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei M ein ctm eines Fragmentes von ZFC. Gibt es ein Forcing $\mathbb{P} \in M$, so dass $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \neg\mathsf{AC}$?

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Seien M ein ctm, $\mathbb{P} \in M$ eine Forcinghalbordnung, H eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$, $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}'$ seien jeweils Filter auf H, und es gelte

$$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'.$$

Sei τ ein $\mathbb{P}$-Name, der erblich symmetrisch bezüglich $\mathscr{F}$ ist.

i) Ist τ erblich symmetrisch bezüglich $\mathscr{F}'$?

ii) Gilt $M_{\mathscr{F}}[G] \subseteq M_{\mathscr{F}'}[G]$?