Blatt 12

Abgabe am 22.01.2019 vor 10 Uhr

Wir definieren das *random Forcing*[1] $\mathbb{B}$ wie folgt: Sei λ das Lebesgue-Maß auf dem reellen Intervall $[0,1]$. Für eine Borelmenge $a \subseteq [0,1]$ setzen wir $[a]_\approx := \{b \subseteq [0,1] \ : \ b \text{ Borel} \wedge \lambda(a \triangle b) = 0\}$. Betrachten Sie

$$\mathbb{B} := \{[a]_\approx \ : \ a \subseteq [0,1] \text{ Borel}, \lambda(a) > 0\}$$

zusammen mit der Ordnung $[a]_\approx \leq_{\mathbb{B}} [b]_\approx :\Leftrightarrow \lambda(a \setminus b) = 0$. Dass das random Forcing wohldefiniert ist, folgt aus den Aufgaben 2 und 3 von Blatt 11.

Aufgabe 1. Sei M ein ctm und G ein $\mathbb{B}$-generischer Filter über M. Wir schreiben $\mathrm{cl}(a)$ für den Abschluss von a in der üblichen Topologie auf dem Intervall $[0,1]$. Zeigen Sie:

i) $\bigcap\{\mathrm{cl}(a) \ : \ [a]_\approx \in G\}$ ist nicht leer.

ii) Wenn $x, y \in \bigcap\{\mathrm{cl}(a) \ : \ [a]_\approx \in G\}$, dann gilt $x = y$.

Wenn $\bigcap\{\mathrm{cl}(a) \ : \ [a]_\approx \in G\} = \{r\}$, so heißt r *random real* über M.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}$ Kardinalzahlen erhält.

Eine Forcinghalbordnung $\mathbb{P}$ heißt *ω^ω-bounding*, wenn es für jeden $\mathbb{P}$-Namen $\dot{f} \in M^{\mathbb{P}}$ und jede Bedingung $p \in \mathbb{P}$, so dass $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f} \in \omega^\omega$, eine Funktion $g \in \omega^\omega \cap M$ und eine Bedingung $q \leq p$ gibt, so dass $q \Vdash_{\mathbb{P}} \forall n \in \omega \ \dot{f}(n) \leq \check{g}(n)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}$ ω^ω-bounding ist.

Hinweis: Seien $\dot{f} \in M^{\mathbb{B}}$ und $[a]_\approx \in \mathbb{B}$ gegeben mit $[a]_\approx \Vdash \dot{f} \in \omega^\omega$. Für $n, m \in \omega$ definieren wir $[r_{n,m}]_\approx := [a]_\approx \wedge [\![\dot{f}(\check{n}) = \check{m}]\!]$.

Erste Version:
Zeigen Sie, dass es für jedes $N \in \omega$ ein $h_N : N \to \omega$ gibt, so dass $h_N \subseteq h_{N+1}$ und

$$\lambda(\bigwedge_{n<N} \bigvee\{[r_{n,m}]_\approx \ : \ m \leq h_N(n)\}) \geq \lambda(a)(1 - 2^{-N-2}).$$

Wie sieht nun das passende $h \in \omega^\omega \cap M$ aus? Gibt es ein $[b]_\approx \in \mathbb{B}$, so dass $\forall n \in \omega \ [b]_\approx \leq_{\mathbb{B}} \bigvee\{[r_{n,m}]_\approx \ : \ m \leq h(n)\}$?

Zweite Version:
Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \omega$ ein $h(n) \in \omega$ gibt, so dass

$$\lambda(\bigvee\{[r_{n,m}]_\approx \ : \ m \leq h(n)\}) \geq \lambda(a)(1 - 2^{-n-2}).$$

Gibt es ein $[b]_\approx \in \mathbb{B}$, so dass $\forall n \in \omega \ [b]_\approx \leq_{\mathbb{B}} \bigvee\{[r_{n,m}]_\approx \ : \ m \leq h(n)\}$? [2]

Bitte wenden.

[1] Dieses wird auch Solovay-Forcing genannt.
[2] Je nach Bewandertheit in stochastischen Rechnungen, kann man sich für eine Version entscheiden.

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Vorspann zur Aufgabe 4: Eine Funktion $f \in M[G] \cap \omega^\omega$ heißt *unbeschränkt über* M, wenn

$$\forall h \in M \cap \omega^\omega \; \forall k \in \omega \; \exists n \geq k \; f(n) > h(n).$$

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{C} := \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$ und G ein $\mathbb{C}$-generischer Filter über M. Gibt es in $M[G]$ eine unbeschränkte Funktion über M? Folgern Sie, dass $\mathbb{C}$ nicht ω^ω-bounding ist.

Hinweis: Man kann z.B. $x_G := \bigcup G$ setzen und es mit der in $M[G]$ definierten Funktion

$$f(0) := \min\{k \, : \, x_G(k) = 1\}$$
$$f(n+1) := \min\{k > f(n) \, : \, x_G(k) = 1\}$$

versuchen. Ist f wohldefiniert? Ist f unbeschränkt über M?