Blatt 13

Abgabe am 29.01.2019 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{B}$ das Random-Forcing von Blatt 12. Wir geben eine alternative Definition des *Cohen-Forcings*, indem wir $\mathbb{C} = {}^{<\omega}\omega$ und $q \leq p \Leftrightarrow q \supseteq p$ setzen.

i) Gibt es eine vollständige Einbettung $i \colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$?

ii) Gibt es eine dichte Einbettung $i \colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$?

Aufgabe 2. Seien $\mathbb{P}$ eine abzählbare Forcinghalbordnung ohne Atome und $\mathbb{C}$ wie in Aufgabe 1.

i) Zeigen Sie, dass es eine dichte Einbettung $i \colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}$ gibt. Folglich liefern $\mathbb{P}$, $\mathbb{C}$, $\mathrm{Fn}(\omega, \omega, \omega)$, $\mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$, $\mathrm{Fn}(\omega, 3, \omega)$, $\ldots$ alle die gleichen generischen Erweiterungen. Dies ist der Grund, warum jede dieser Halbordnungen „Cohen-Forcing“ genannt wird.

ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \not\cong \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$, d.h., es gibt keine bijektive Abbildung $i \colon \mathbb{C} \to \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$ mit der Eigenschaft $\forall p, q \in \mathbb{C}\ q \leq p \leftrightarrow i(q) \leq i(p)$.

Aufgabe 3. Sei M ein ctm und $\mathbb{P} \in M$ eine Forcinghalbordnung ohne Atome. Sei $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette generischer Erweiterungen, so dass für $n < \omega$ die Menge $G_n \subseteq \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M_n ist und $M_{n+1} = M_n[G_n]$ gilt. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\in\omega} M_n \not\models \mathsf{Pot}$.

Hinweis: Liegt die Potenzmenge von $\mathbb{P}$ in $\bigcup_{n\in\omega} M_n$?

Aufgabe 4. Sei M ein ctm. Wir definieren das *Hechler-Forcing* $\mathbb{D}$:

$$(s, f) \in \mathbb{D} \Leftrightarrow s \in {}^{<\omega}\omega \wedge f \in {}^{\omega}\omega \wedge (s, f) \in M$$
$$(t, g) \leq (s, f) \Leftrightarrow s \subseteq t \wedge \forall n \in \omega\ f(n) \leq g(n) \wedge \forall n \in \mathrm{dom}(t) \setminus \mathrm{dom}(s)\ t(n) \geq f(n).$$

i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}$ die c.c.c. hat.

ii) Zeigen Sie, dass es einen $\mathbb{D}$-Namen $\dot{g} \in M^{\mathbb{D}}$ gibt, so dass für alle $f \in {}^{\omega}\omega \cap M$ gilt, dass

$$\mathbb{1}_{\mathbb{D}} \Vdash \exists N < \omega \forall n \geq N\ \check{f}(n) < \dot{g}(n),$$

d.h. in jeder generischen Erweiterung von $\mathbb{D}$ gibt es eine Funktion $g \colon \omega \to \omega$, die jede Funktion $f \colon \omega \to \omega$ aus dem Grundmodel ab einer (von der Funktion abhängenden) Stelle dominiert.

Hinweis zu ii): Sei G ein $\mathbb{D}$-generischer Filter. Sie können zum Beispiel

$$g = \bigcup\{s\ :\ \exists f \in M \cap {}^{\omega}\omega\ (s, f) \in G\}$$

untersuchen.