Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Bonusblatt

Abgabe am 05.02.2019 vor 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte; Lemma von König). Zeigen Sie, dass jeder ω-Baum einen konfinalen Ast besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Ein κ^+-Baum $(T, <)$ heißt *speziell*, wenn es eine Abbildung $f\colon T \to \kappa$ gibt, so dass für alle $s < t$, $f(s) \neq f(t)$. Die Abbildung f heißt Spezialisierungsfunktion.

Sei $\kappa \geq \omega$. Zeigen Sie, dass jeder spezielle κ^+-Baum ein κ^+-Aronszajnbaum ist.

Eine Teilmenge $A \subseteq \omega^\omega$ heißt *unbeschränkt*, falls es zu jedem $f \in \omega^\omega$ ein $g \in A$ gibt, so dass gilt:

$$(\exists^\infty n) f(n) \leq g(n).$$

Also $g \not\leq^* f$.

Wir definieren die *Unbeschränktheitszahl, unboundedness number*

$$\mathfrak{b} := \min\{|A| \;:\; A \subseteq \omega^\omega \text{ unbeschränkt}\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq 2^{\aleph_0}$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Ist $\mathfrak{b}$ immer regulär?

Bemerkung: Sowohl die Mengen 2^ω, ω^ω, als auch deren Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, werden das *Kontinuum* genannt. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass $\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega$ gelten muss. Die nächste Aufgabe zeigt, dass es ein Modell gibt, in dem das Kontinuum singulär ist, d.h., dass $\mathrm{cf}(2^\omega) < 2^\omega$ relativ konsistent mit ZFC ist.

Aufgabe 5 (8 Punkte). Wir nehmen ein ctm M, so dass

$$M \models (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}.$$

Kennen Sie ein Beispiel für so ein M? Sei

$$\mathbb{P} := (\mathrm{Fn}_{<\omega}(\aleph_{\omega_1} \times \omega, 2))^M.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash_M 2^\omega = \aleph_{\omega_1}.$$

Hinweis: Man kann die Anzahl der Namen für reelle Zahlen nach oben abschätzen, indem man Namen von besonders einfacher Form betrachtet und zeigt, dass jede reelle Zahl einen Namen der angebenen einfachen Form hat.