

Blatt 4

Abgabe am 13.11.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1 (Satz von Cantor). Zeigen Sie in ZF: Für jede Menge $x \in \mathbf{V}$ gibt es keine Surjektion von x auf $\mathcal{P}(x)$. Unter ZFC ist letzteres äquivalent zur Formulierung $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.

Mit $\text{tcl}(x)$ wird die transitive Hülle von x bezeichnet. Falls $|\text{tcl}(x)| = \kappa$, sagt man auch „ x hat erbliche Mächtigkeit κ .“

Sei κ eine Kardinalzahl. Wir definieren

$$H(\kappa) := \{x \in \mathbf{V} : |\text{tcl}(x)| < \kappa\}.$$

$H(\kappa)$ wird auch „die Menge der Mengen von erblicher Kardinalität kleiner κ “ genannt. H soll an hereditary erinnern.

Aufgabe 2. (a) Warum ist $H(\kappa) \in \mathbf{V}$? Hinweis: Man kann zum Beispiel induktiv über $\alpha \geq \omega$ zeigen:

$$x \in V_{\alpha+1} \setminus V_{\alpha} \rightarrow |\text{tcl}(x)| \geq |\alpha|,$$

und dies zu einer Kontraposition verwenden.

(b) Welche Axiome aus ZFC gelten in $(H(\omega_1), \in)$? Gilt $(H(\omega_1), \in) \models \text{ZFC}$? Die Menge $H(\omega_1)$ wird die Menge der erblich abzählbaren Mengen (the set of hereditarily countable sets) genannt.

Vorspann zu den Aufgaben 3 und 4: Das *Sammlungsschema* (*Collection scheme*) sagt: Für alle $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$ mit $\text{fr}(\varphi) \subseteq \{x, y, A, w_1, \dots, w_n\}$ gilt folgendes:

$$\forall A \forall w_1 \dots \forall w_n (\forall x \in A \exists y \varphi(x, y, \bar{w}) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi(x, y, \bar{w})).$$

Hier steht \bar{w} für w_1, \dots, w_n .

Aufgabe 3. Zeigen Sie: ZF – Ersetzungsschema + Sammlungsschema \vdash Ersetzungsschema.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: ZF \vdash Sammlungsschema.

Hinweis: Wir nehmen eine Formel $\psi(x, \beta)$, die sagt:

$$\beta \text{ ist die kleinste Ordinalzahl, so dass } \exists y \varphi(x, y) \wedge y \in V_{\beta}.$$

Warum kann man ψ erststufig ausdrücken? Ist $\beta \mapsto V_{\beta}$ erststufig? Nach welchem Satz?

Aus welchem Satz folgt: $\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists \beta \psi(x, \beta)$?

Wenden Sie das Ersetzungsschema auf ψ an. Sind die Voraussetzungen dazu erfüllt? Wie hängt eine Obermenge der Bildmenge von ψ mit einer Menge der gesuchten Art zusammen?