Blatt 5

Abgabe am 20.11.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $X \in \mathbf{V}$ gegeben, und sei $|X| \geq \omega$. Zeigen Sie, dass es eine absteigende Folge $X \supseteq x_0 \supseteq x_1 \supseteq \ldots$ von Teilmengen von X gibt, so dass $|x_n| = |X|$ für jedes $n < \omega$ und $\bigcap_{n<\omega} x_n = \emptyset$ gilt.

Die nächste Aufgabe ist eine Verallgemeinerung des Schubfachprinzips (engl. *pigeonhole principle*): Sei $k < \omega$ und $f \colon \omega \to k$. Dann gibt es ein $l < k$, so dass $|f^{-1}(l)| = \omega$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Seien $\kappa \geq \lambda \geq \omega$ und $f \colon \kappa \to \lambda$ gegeben. Was ist eine hinreichende Bedingung, damit es ein $\alpha < \lambda$ gibt, so dass $|f^{-1}(\alpha)| = \kappa$? Folgende Antworten scheinen denkbar:

i) $\kappa > \lambda$,

ii) $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$,

iii) $\mathrm{cf}(\kappa) > \mathrm{cf}(\lambda)$.

Geben Sie zu jeder der drei Möglichkeiten einen Beweis, wenn die Aussage stimmt, bzw. ein Gegenbeispiel, wenn sie falsch ist.

Vorspann zu Aufgabe 3:
Sei $\kappa \geq 1$ eine Ordinalzahl. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ heißt *Filter über* κ, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
2. $\kappa \in \mathcal{F}$,
3. $X, Y \in \mathcal{F} \to X \cap Y \in \mathcal{F}$,
4. $X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \subseteq \kappa \to Y \in \mathcal{F}$.

Hier verwenden wir die Konvention, dass freie Variablen gelesen werden wie durch $\forall$ abquantifizierte Variablen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei κ eine Kardinalzahl mit überabzählbarer Konfinalität. Wir definieren:

$$\mathcal{C}_\kappa := \{X \subseteq \kappa \,:\, \exists C \subseteq \kappa (C \text{ ist club } \wedge C \subseteq X)\}.$$

Ist $\mathcal{C}_\kappa$ ein Filter über κ? Gibt es ein $X \in \mathcal{C}_\kappa$, so dass X nicht club ist?

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Zeigen Sie, dass gilt:

i) $(2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \otimes \kappa}$.

ii) $2^\kappa = \kappa^\kappa$.