Blatt 6
Abgabe am 27.11.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Sei $\kappa > \omega$ regulär und $\lambda = |\{\alpha < \kappa \, : \, \alpha = \mathrm{cf}(\alpha)\}|$. Zeigen Sie, dass es mindestens λ disjunkte stationäre Teilmengen von κ gibt, indem Sie die Mengen explizit angeben.

Aufgabe 2. Sei κ eine Kardinalzahl und $U \subseteq \kappa$ unbeschränkt. Schätzen Sie die Mächtigkeit von U nach unten ab. Sei nun $\kappa > \omega$ regulär. Gibt es eine nicht stationäre Teilmenge $N \subseteq \kappa$ der Mächtigkeit κ?

Aufgabe 3. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Wir definieren die Menge

$$A := \{f : \aleph_0 \to \kappa \mid f \text{ streng monoton steigend}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\kappa^{\aleph_0} = |A|$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass ${\beth_\omega}^{\aleph_0} = \prod_{n\in\omega} \beth_n$ gilt.

Hinweise zu den Aufgaben finden Sie auf der Rückseite.

Hinweis (Aufgabe 1)**.** Versuchen Sie zu zeigen, dass für $\omega \leq \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ die Menge $S_\lambda := \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$ stationär ist.

Hinweis (Aufgabe 3)**.** Überlegen Sie sich, wie Sie eindeutig jede Funktion $f : \aleph_0 \to \kappa$ kodieren können, so dass der Code jeweils eine streng monoton steigende Funktion ergibt.

Hinweis (Aufgabe 4)**.** Benutzen Sie Aufgabe 3, um die Richtung ${\beth_\omega}^{\aleph_0} \leq \prod_{n\in\omega} \beth_n$ zu vereinfachen. Es genügt also eine Injektion von $B := \{f : \aleph_0 \to \beth_\omega \ : \ f \text{ streng monoton steigend}\}$ nach $\prod_{n\in\omega} \beth_n$ zu finden. Sie können versuchen, ein Element aus B mit Hilfe seines Graphen zu kodieren.