Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 7

Abgabe am 04.12.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Komplexität folgender Formeln in der Lévy-Hierarchie:

i) „x ist eine Ordinalzahl" (mit Fundierung in der Hintergrundtheorie)

ii) „x ist abzählbar" (mit genügend Hintergrundtheorie)

iii) „y ist die Potenzmenge von x".

Bemerkung: Bei Teilaufgabe iii) können Sie wahrscheinlich noch nicht beweisen, dass Ihre Angabe von der niedrigsten möglichen Komplexität ist. Die Aufforderung „bestimmen Sie" ist hier nicht streng gemeint. In einigen Vorlesungsstunden werden Sie die Optimalität beweisen können.

Aufgabe 2. Für alle $\alpha \in \mathbf{On}$ gilt offensichtlich $L_\alpha \subseteq V_\alpha$.

a) Bestimmen Sie das kleinste α, so dass $L_\alpha \subsetneq V_\alpha$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $L_\alpha \in \mathbf{L}$ für jedes α gilt.

Definiton. Wir geben eine mengentheoretische Definition der Objekte $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ an.

1. $\mathbb{N} := \omega$,
2. $\mathbb{Z} := \omega \cup \{\langle 1, \langle m, 1\rangle\rangle \ : \ 0 < m < \omega\}$,
3. $\mathbb{Q} := \omega \cup \{\langle l, \langle m, n\rangle\rangle \in \omega \times \omega \times \omega \ : \ (m, n \geq 1 \wedge \mathrm{ggT}(m,n) = 1 \wedge l \in 2 \wedge (l = 0 \rightarrow n \geq 2))\}$,
4. $\mathbb{R} := \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{\emptyset\} : x$ ist nach oben beschränkt und hat kein maximales Element $\wedge \forall p, q \in \mathbb{Q}(p < q \in x \rightarrow p \in x)\}$,
5. $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Bemerkung: Der erste Eintrag $l \in 2$ bei einer rationalen Zahl gibt an, ob es sich um eine negative ($l = 0$) oder positive ($l = 1$) Zahl handelt. $\mathrm{ggT}(m,n)$ steht für den größten gemeinsamen Teiler von m und n.

Aufgabe 3. Gilt $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \in L_{\omega+\omega}$?

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Rang von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Gilt $\mathbb{R} \in L_{\omega+\omega}$?