

Blatt 8

Abgabe am 11.12.2018 vor 10 Uhr

Aufgabe 1. Seien $x, y \in \mathbf{L}$ gegeben. Zeigen Sie, dass folgende Mengen auch in \mathbf{L} liegen

$$\{x, y\}, \langle x, y \rangle, \bigcup x \text{ und } \omega.$$

Aufgabe 2. Ist $\{\alpha < \omega_1 : L_\alpha \prec L_{\omega_1}\}$ club in ω_1 ?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Komplexität der Operationen

a) $x \mapsto \text{tcl}(x)$

b) $x \mapsto \text{rk}(x)$

in der Lévy-Hierarchie (mit Hintergrundtheorie ZF).

Hinweis: Sei $F: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ eine Operation aus der Aufgabenstellung und $\varphi(x, y)$ eine Formel, so dass gilt:

$$\text{ZF} \vdash F \text{ ist eine Operation und } (F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y)).$$

Gesucht ist nun die minimale Komplexität von φ in der Lévy-Hierarchie. Eventuell hilft Ihnen der Δ_1 -Rekursionssatz.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie möglichst genau die Komplexität der Aussage

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Aufgabe 5 (2 Bonus-Punkte). Berechnen Sie den Mostowski-Kollaps der \in -Struktur

$$\mathfrak{A} := (\{\{\aleph_1\}, \{\aleph_2\}\}, \in).$$