Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 9

Abgabe am 18.12.2018 vor 10 Uhr

Für das gesamte Aufgabenblatt nehmen wir an, dass M ein abzählbares, transitives Modell eines genügend großen Fragmentes von ZFC ist und $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M sind.

Aufgabe 1. Seien $p, q, r \in \mathbb{P}$. Wir definieren einen $\mathbb{P}$-Namen $\tau := \{\langle \emptyset, p\rangle, \langle \{\langle \emptyset, q\rangle\}, r\rangle\}$.

i) Berechnen Sie τ_G für alle 8 Möglichkeiten, je nachdem, ob die Bedingungen p, q, r Elemente von G sind oder nicht.

ii) Berechnen Sie die Mächtigkeit von $M[G]$.

Aufgabe 2. Seien $p, q \in \mathbb{P}$ inkompatibel. Zeigen Sie, dass die Menge

$$O := \{\tau \in M \ : \ p \Vdash \tau = \check{0}\}$$

eine echte Klasse in M ist, d.h. es kann nicht $O \in M$ gelten.

Definiton. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}$ heißt *Antikette*, wenn je zwei Elemente aus A inkompatibel sind. Eine Antikette heißt *maximal*, wenn jede echte Erweiterung $B \subseteq \mathbb{P}$ von A keine Antikette mehr ist. Eine Teilmengen $E \subseteq \mathbb{P}$ heißt *prädicht*, wenn es zu jeder Bedingung $p \in \mathbb{P}$ ein $q \in E$ gibt, so dass p und q kompatibel sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

i) $G \cap D \neq \emptyset$ für jede dichte Teilmenge $D \in M$ von $\mathbb{P}$;

ii) $G \cap A \neq \emptyset$ für jede maximale Antikette $A \in M$ von $\mathbb{P}$;

iii) $G \cap E \neq \emptyset$ für jede prädichte Teilmenge $E \in M$ von $\mathbb{P}$.

Aufgabe 4. Eine Bedingung $p \in \mathbb{P}$ heißt *Atom*, wenn je zwei stärkere Bedingungen $q, r \leq p$ kompatibel sind.

i) Nehmen Sie an, dass $\mathbb{P}$ keine Atome hat. Gibt es eine unendliche Antikette?

ii) Angenommen $\mathbb{P}$ besitzt für jedes $n < \omega$ eine Antikette mit mindestens n Elementen. Hat $\mathbb{P}$ dann eine unendliche Antikette?

Hinweis: Bei dem zweiten Aufgabenteil könnte man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Menge der Atome dicht in $\mathbb{P}$ ist oder nicht.