Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 1

Abgabe am 10.11.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin – Lehrveranstaltungen aus HISinOne – WS20 – Math. Inst.-VB – Mengenlehre

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. x ist eine transitive Menge, und $\in$ ist konnex auf x (d.h. für alle $u, v \in x$ ist $u \in v$ oder $v \in u$ oder $u = v$).
2. x ist eine transitive Menge und $(x, \in)$ ist eine lineare Ordnung.
3. x ist eine transitive Menge und es gibt eine Ordinalzahl α und einen Isomorphismus $f : (x, \in) \to (\alpha, \in)$.

Gilt ein Analogon für Klassen statt Mengen? Wir lassen nur Klassen zu, deren Elemente Mengen sind.

Hinweis: Denken Sie an das Fundierungsaxiom.

Aufgabe 2.

1. Geben Sie eine transitive Menge an, auf der $\in$ nicht konnex ist.
2. Zeigen Sie, dass die Nachfolgeroperation $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, x \mapsto x \cup \{x\}$, injektiv ist. (Hinweis: Auch hier spielt Fundierung eine Rolle.)

Aufgabe 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Operation $\bigcup^{(n)}$ wie folgt:

- $\bigcup^{(0)} x = x$,
- $\bigcup^{(n+1)} x = \bigcup(\bigcup^{(n)} x)$.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Finden Sie eine Menge x, so dass $\bigcup^{(n+1)} x = \emptyset$ und $\bigcup^{(n)} x \neq \emptyset$.
2. Finden Sie eine Menge $x \neq \emptyset$, so dass $\bigcup x = x$.

Aufgabe 4. Seien R eine Äquivalenzrelation auf einer echten Klasse A und T ein Repräsentantensystem von R. Man zeige, dass (a) oder (b) gilt:

(a) T ist eine echte Klasse;

(b) es gibt ein $w \in A$, so dass $w/R := \{u \in A \, : \, wRu\}$ eine echte Klasse ist.

Man gebe jeweils ein Beispiel an, so dass

- (a) und (b) bzw.,
- (a) und nicht (b),
- (b) und nicht (a)

gelten.