Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 11

Abgabe am 02.02.2021 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Definition: Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Halbordnung $\mathbb{P}$ heißt $(<\lambda)$-*abgeschlossen*, wenn für jede Ordinalzahl $\gamma < \lambda$ jede absteigende Kette $\langle p_\alpha \ : \ \alpha < \gamma \rangle$ eine untere Schranke in $\mathbb{P}$ hat. (Bem.: Jedes $\mathbb{P}$ is $(<\omega)$-abgeschlossen. Daher ist die Definition nur für überabzählbare λ interessant.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung und $\lambda \geq \omega$ eine singuläre Kardinalzahl. Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}$ $(<\lambda)$-abgeschlossen ist.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ $(<\lambda^+)$-abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** In dieser Aufgabe setzen wir $(\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH})$ voraus. Geben Sie unter dieser Voraussetzung das kleinste κ an, so dass $\mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)$ (auch $\mathrm{Fn}_{<\omega_1}(\omega_1, 2)$ genannt) die κ-c.c. hat. Begründen Sie Ihre Anwort.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Seien M ein ctm, $\mathbb{P} \in M$ eine Forcinghalbordnung, H eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$, $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}'$ seien jeweils Filter auf H, und es gelte

$$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'.$$

Sei τ ein $\mathbb{P}$-Name, der erblich symmetrisch bezüglich $\mathscr{F}$ ist.

1. Ist τ erblich symmetrisch bezüglich $\mathscr{F}'$?
2. Gilt $M_{\mathscr{F}}[G] \subseteq M_{\mathscr{F}'}[G]$?

Aufgabe 4 (8 Punkte)**.** Sei M ein ctm und $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \omega)$. Wir definieren die $\mathbb{P}$-Namen $\dot{a}_i$, $i < \omega$, und $\dot{A}$ durch:

$$\dot{a}_i = \{\langle \check{n}, p \rangle \ : \ p(i,n) = 1\},$$
$$\dot{A} = \{\langle \dot{a}_i, 1 \rangle \ : \ i < \omega\}.$$

Jede Permutation π von ω induziert einen Automorphismus π_{ind} auf $\mathbb{P}$ via:

$$\mathrm{dom}(\pi_{\text{ind}}(p)) = \{(\pi(i), n) \ : \ (i,n) \in \mathrm{dom}(p)\},$$
$$\pi_{\text{ind}}(p)(\pi(i), n) = p(i,n);$$

und eine Hochhebung von $\bar{\pi_{\text{ind}}}$ auf $M^{\mathbb{P}}$ via:

$$\bar{\pi_{\text{ind}}}(\tau) = \{\langle \bar{\pi_{\text{ind}}}(\sigma), \pi_{\text{ind}}(p) \rangle \ : \ \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}.$$

Sei $H = \{\pi_{\text{ind}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) \ : \ \pi \text{ Permutation von } \omega\}$. Dann ist H eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$. Für endliches $E \subseteq \omega$ definieren wir weiter

$$\mathrm{fix}(E) = \{\pi_{\text{ind}} \in H \ : \ \forall n \in E(\pi(n) = n)\}.$$

Sei $\mathscr{F}$ der durch $\{\mathrm{fix}(E) \ : \ E \subseteq \omega \text{ endlich}\}$ erzeugte Filter auf H.

Sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M.

1. Zeigen Sie, dass die $\mathbb{P}$-Namen $\dot{a}_i$, $i < \omega$, und $\dot{A}$ erblich symmetrisch bezüglich $\mathscr{F}$ sind.

2. Zeigen Sie, dass A eine unendliche Menge reeller Zahlen in $M_{\mathscr{F}}[G]$ ist.

3. Zeigen Sie, dass A keine abzählbare Teilmenge besitzt in $M_{\mathscr{F}}[G]$. d.h., es gibt in $M_{\mathscr{F}}[G]$ keine Injektion $f\colon \omega \to A$.

Hinweise:
2. Es genügt zu zeigen, dass die Mengen a_i paarweise verschieden sind in $M_{\mathscr{F}}[G]$.
3. Versuchen Sie einen Beweis durch Widerspruch. Nehmen Sie an, es gibt eine injektive Funktion $f\colon \omega \to A$ in $M_{\mathscr{F}}[G]$. Dann gibt es einen $\mathbb{P}$-Namen $\dot{f}$, der erblich symmetrisch bzgl. $\mathscr{F}$ ist und eine Bedingung $p \in G$, die das forct, also $p \Vdash_{\mathscr{F}} \dot{f}\colon \check{\omega} \to \dot{A}$ ist injektiv. Leiten Sie ähnlich wie in der Vorlesung über das Beispiel mit den unendlich vielen Paarmengen einen Widerspruch daraus her.

Dies gehört nun nicht zu den Hausaufgaben, sondern ist für die Seminarteilnehmer(innen).
Anregung für eine superschwere Aufgabe: In $M_{\mathscr{F}}[G]$ lässt sich jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitern, d.h. das Primidealtheorem gilt.