Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 2

Abgabe am 17.11.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $\mathbf{A} = \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ und sei $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ die folgende Relation:

$$\langle x, y\rangle \mathbf{R} \langle z, u\rangle :\Leftrightarrow ((x \in z \wedge y = u) \vee (x = z \wedge y \in u)).$$

i) Ist $\mathbf{R}$ mengenähnlich auf $\mathbf{A}$?

ii) Ist $\mathbf{R}$ fundiert auf $\mathbf{A}$?

Begründen Sie Ihre Anworten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

i) Geben Sie ein Beispiel zweier nicht isomorpher linerarer Ordnungen (A, R) und (B, S), so dass weder (A, R) ein echtes Anfangsstück von (B, S) noch (B, S) ein echtes Anfangsstück von (A, R) ist.

ii) Geben Sie ein Beispiel einer Kette von Wohlordnungen $(A_n, R_n)_{n\in\omega}$, so dass für alle n (A_n, R_n) eine algebraische Substruktur von (A_{n+1}, R_{n+1}) ist und trotzdem $(\bigcup_n A_n, \bigcup_n R_n)$ keine Wohlordnung ist.
Definition oder Erinnerung: (A_n, R_n) ist eine algebraische Substruktur von (A_{n+1}, R_{n+1}), falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $R_{n+1} \cap (A_n \times A_n) = R_n$.

Definition Sei $X \in \mathbf{V}$ eine Menge. Wir definieren die folgenden Varianten des Auswahlaxioms:

$\mathsf{AC}_\omega(X)$ (*Abzählbare Auswahl auf* X): Für alle $\{P_n : n \in \omega\}$ mit $(P_n \subseteq X \wedge P_n \neq \emptyset)$, gibt es eine Funktion $f : \omega \to \mathbf{V}$, so dass $\forall n \in \omega(f(n) \in P_n)$.

$\mathsf{DC(X)}$ (*Abhängige Auswahl auf* X): Für jedes $R \subseteq X \times X$ mit $\forall x \in X \exists y \in X((x, y) \in R)$, gibt es eine Folge $\langle x_n : n \in \omega\rangle$, so dass $\forall n \in \omega((x_n, x_{n+1}) \in R)$.

AC_ω (*Abzählbare Auswahl*): Für alle Mengen X gilt $\mathsf{AC}_\omega(X)$.

DC (*Abhängige Auswahl, dependent choice(s)*): Für alle nicht leeren Mengen X gilt $\mathsf{DC}(X)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Wenn es eine surjektive Funktion $f : Y \to X$ gibt, dann gelten folgende zwei Implikationen: $\mathsf{AC}_\omega(Y) \Rightarrow \mathsf{AC}_\omega(X)$ und $\mathsf{DC}(Y) \Rightarrow \mathsf{DC}(X)$.

Aufgabe 4 (4 Bonus-Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Implikationen gelten:

i) $\mathsf{AC} \to \mathsf{DC}$

ii) $\mathsf{DC} \to \mathsf{AC}_\omega$