Mengenlehre - Unabhängigkeitsbeweise
WS 2020/21
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

Blatt 3, mit nun hoffentlich korrekter Definition von WF

Abgabe am 24.11.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathbf{On}\rangle$ die von Neumann-Hierarchie und $\mathbf{WF} = \bigcup V_\alpha$. Seien $x, y \in \mathbf{WF}$.

1. Zeigen Sie, $\mathrm{rk}(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$.
2. Berechnen Sie:
   (a) $\mathrm{rk}(\mathcal{P}(x))$,
   (b) $\mathrm{rk}(\{x\})$,
   (c) $\mathrm{rk}(x \times y)$,
   (d) $\mathrm{rk}(\bigcup x)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** (Neue Fassung) Arbeiten Sie in $\mathsf{ZF}^- - \mathsf{P}$. Sei $\mathbf{WF}$ die Klasse aller Mengen $x \in \mathbf{V}$, so dass der transitive Abschluss $(\mathrm{tc}(x), \in)$ fundiert ist.[1]

Sei $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{V}$ eine Teilklasse, sodass gilt:

$$\forall x((x \subseteq \mathbf{K} \wedge x \in \mathbf{V}) \to x \in \mathbf{K}).$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{WF} \subseteq \mathbf{K}$ gelten muss.
Was folgt, wenn Sie die Fundierung dazu nehmen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ mit $(\alpha \geq \omega \vee \beta \geq \omega)$. Zeigen Sie, dass $\exp_{ord}(\alpha, \beta) < \max(\alpha, \beta)^+$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Bonus-Punkte)**.** Die $\aleph$-Universität: Die Anforderungen um an der $\aleph$-Universität zu promovieren, sind lediglich die Kurse $\boxed{\sigma}$, für jedes $\sigma \in \omega^{<\omega}$. Die Voraussetzungen für $\boxed{\sigma}$ sind alle Kurse $\boxed{\tau}$, für ein τ, dass aus σ entsteht, wenn man einen Eintrag n aus σ durch eine endliche (möglicherweise auch leere) Folge von natürlichen Zahlen echt kleiner n ersetzt. So lehrt Sie z.B. $\boxed{2,1,7,1}$ alles über die Folge $(2,1,7,1)$, und hat als Voraussetzung unter anderem $\boxed{1,7,1}$, $\boxed{0,1,1,0,1,7,1}$, $\boxed{2,1,5,5,4,0,1,1}$. $\boxed{}$ lehrt Sie alles über die leere Folge $\emptyset$ und besitzt keine Voraussetzungen.

1. Zeigen Sie, dass die Relation $(\tau, \sigma) \in R :\Leftrightarrow \boxed{\tau}$ ist Voraussetzung von $\boxed{\sigma}$, fundiert ist; d.h. Sie können in ordinal vielen Semestern promovieren.
2. Berechnen Sie die Rangfunktion $\mathrm{rk}_R : \omega^{<\omega} \to \mathbf{On}$ von R, wobei $\mathrm{rk}_R(x)$ das erste Semester angibt, in dem Sie frühestens Kurs $\boxed{x}$ belegen können. Es ist nicht möglich, in einem Semester zwei Kurse zu belegen, die aufeinander aufbauen.

Hinweis: Da eine Rangfunktion nützlich ist, um Fundiertheit zu zeigen, können Sie auch zuerst den zweiten Aufgabenteil bearbeiten. Denken Sie an die Cantor'sche Normalform bei der Rangfunktion.

[1] Wir danken Frau Maja König für ihren Hinweis.