Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

# Blatt 5

Abgabe am 8.12.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei $X \in \mathbf{V}$ gegeben mit $|X| \geq \omega$. Gibt es eine absteigende Folge $X \supseteq x_0 \supseteq x_1 \supseteq \ldots$ von Teilmengen von $X$, sodass $|x_n| = |X|$ für jedes $n < \omega$ und $\bigcap_{n<\omega} x_n = \emptyset$ gilt?

Die nächste Aufgabe ist eine Verallgemeinerung des Schubfachprinzips (engl. *pigeonhole principle*): Sei $k < \omega$ und $f : \omega \to k$. Dann gibt es ein $l < k$, sodass $|f^{-1''}\{l\}| = \omega$.

**Aufgabe 2** (6 Punkte)**.** Seien $\kappa \geq \lambda \geq \omega$ und $f : \kappa \to \lambda$ gegeben. Was ist eine hinreichende Bedingung, damit es ein $\alpha < \lambda$ gibt, sodass $|f^{-1''}\{\alpha\}| = \kappa$? Folgende Antworten scheinen denkbar:

i) $\kappa > \lambda$,

ii) $\kappa > \mathrm{cf}(\lambda)$,

iii) $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$,

iv) $\mathrm{cf}(\kappa) > \mathrm{cf}(\lambda)$.

Geben Sie zu jeder der vier Möglichkeiten einen Beweis, wenn die Aussage stimmt, bzw. ein Gegenbeispiel, wenn sie falsch ist.

Sei $\kappa \geq 1$. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ heißt Filter über/auf $\kappa$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
2. $\kappa \in \mathcal{F}$,
3. $\forall X, Y (X, Y \in \mathcal{F} \to X \cap Y \in \mathcal{F})$,
4. $\forall X, Y ((X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \subseteq \kappa) \to Y \in \mathcal{F})$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Sei $\kappa$ eine Kardinalzahl mit überabzählbarer Konfinalität. Wir definieren:

$$\mathcal{C}_\kappa := \{X \subseteq \kappa \,:\, \exists C \subseteq \kappa (C \text{ ist Club} \wedge C \subseteq X)\}.$$

Ist $\mathcal{C}_\kappa$ ein Filter über $\kappa$? Ist die Menge $\mathcal{C}_\kappa$ unter Schnitten von $< \mathrm{cf}(\kappa)$ vielen Elementen abgeschlossen? Gibt es ein $X \in \mathcal{C}_\kappa$, so dass $X$ nicht club ist?

Ohne Bewertung und ohne dass Sie etwas aufschreiben sollen: Wie sieht es für reguläres überabzählbares $\kappa$ mit Diagonalschnitten von $\kappa$-Folgen aus Elementen aus $\mathcal{C}_\kappa$ aus?

**Aufgabe 4** (2 Punkte)**.** Seien $\kappa$, $\lambda$ unendliche Kardinalzahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

i) $(2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \otimes \lambda}$.

ii) $2^\kappa = \kappa^\kappa$.