Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M. Sc. Brendan Stuber-Rousselle

## Blatt 6

Abgabe am 15.12.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

**Aufgabe 1.** Sei $\kappa > \omega$ regulär und $\mu_\kappa = |\{\omega \leq \alpha < \kappa : \alpha = \mathrm{cf}(\alpha)\}|$. Zeigen Sie, dass es mindestens $\mu_\kappa$ disjunkte stationäre Teilmengen von $\kappa$ gibt, indem Sie die Mengen explizit angeben.
Gibt es eine Kardinalzahl $\kappa$, so dass $\kappa = \mu_\kappa$?

*Hinweis*: Versuchen Sie zu zeigen, dass für reguläre Kardinalzahlen $\beta$ mit den Abschätzungen $\omega \leq \beta < \mathrm{cf}(\kappa)$ die Menge $S_\beta := \{\alpha < \kappa \,:\, \mathrm{cf}(\alpha) = \beta\}$ stationär ist.

**Aufgabe 2.** Sei $\lambda = \omega_{\omega_1}$. Eine Familie $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\lambda$ heißt *edf* (engl. *eventually different family*), wenn für alle unterschiedlichen $f, g \in \mathcal{F}$ die Menge $\{\alpha < \omega_1 \,:\, f(\alpha) = g(\alpha)\}$ höchstens abzählbar ist. Wir nehmen an, dass $\forall \alpha < \omega_1 (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ gilt. Zeigen Sie, dass es eine edf $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\lambda$ der Mächtigkeit $2^\lambda$ gibt, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $\alpha < \omega_1 (f(\alpha) \in \omega_{\alpha+1})$.

*Hinweis:* Definieren Sie zu jeder Teilmenge $X \subseteq \lambda$ die Funktion $f_X : \omega_1 \to \mathcal{P}(\lambda)$ durch $f_X(\alpha) := X \cap \omega_\alpha$. Nun müssen Sie auf uniforme Weise noch jedem $f_X$ noch eine passende Funktion $f : \omega_1 \to \lambda$ zuordnen.

**Aufgabe 3** (8 Bonus-Punkte, etwas schwerere Aufgabe[1])**.** Sei $\lambda = \omega_{\omega_1}$, $2^{<\lambda} = \lambda$, $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\lambda$ eine edf. Sei $g : \omega_1 \to \lambda$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall \alpha < \omega_1 (g(\alpha) < \omega_{\alpha+1})$,
2. $\forall f \in \mathcal{F}$ ist die Menge $S_f := \{\alpha < \omega_1 \,:\, f(\alpha) < g(\alpha)\}$ stationär in $\omega_1$.

Zeigen Sie, dass $|\mathcal{F}| \leq \lambda$.

*Hinweis:* Betrachten Sie erst den Fall $g(\alpha) = \omega_\alpha$. Für jedes $f \in \mathcal{F}$ definieren wir eine Funktion $f' : \omega_1 \to \omega_1$ durch:

$$f'(\alpha) := \min\{\beta \,:\, f(\alpha) < \omega_{\beta+1}\}.$$

Benutzen Sie den Satz von Fodor, um eine stationäre Menge $S'_f \subseteq S_f$ zu erhalten, auf der $f'$ konstant ist. Überlegen Sie sich, dass die Abbildung

$$f \mapsto (S'_f, f \restriction S'_f)$$

injektiv auf $\mathcal{F}$ ist und schätzen Sie die Mächtigkeit der Bildmenge nach oben ab.
Für das $g$ aus der Aufgabenstellung benutzen Sie nun eine Injektion von $g(\alpha)$ nach $\omega_\alpha$ für jedes $\alpha < \omega_1$ und wenden $\langle g(\alpha) \,:\, \alpha < \omega_1 \rangle$ geeignet auf jedes $f \restriction S_f$ an.

[1] nach Ansicht von Frau Mildenberger. Sie können mich gerne Ihre Einschätzung wissen lassen.