Blatt 7

Abgabe am 22.12.2020 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbf{V}$ und $R \subseteq A \times A$ eine lineare Ordnung. Sei λ eine Kardinalzahl, so dass für alle $a \in A$ die Menge der R-Vorgänger $\{b \in A \,:\, bRa\}$ Mächtigkeit echt kleiner λ hat. Zeigen Sie $|A| \leq \lambda$.

Hinweis: Auch für linearen Ordnungen kann man Konfinalitäten definieren.

Aufgabe 2. Sei $\lambda = \omega_{\omega_1}$. Wir nehmen an, dass

$$(\forall \alpha < \omega_1)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$$

gilt. Zeigen Sie $2^\lambda = \lambda^+$.

Hinweis: Betrachten Sie auf ${}^{\omega_1}\lambda$ die Quasiordnung[1] $<^* \subseteq {}^{\omega_1}\lambda \times {}^{\omega_1}\lambda$, die gegeben ist durch:

$$f <^* g :\Leftrightarrow \{\alpha < \omega_1 \,:\, f(\alpha) < g(\alpha)\} \text{ ist Obermenge eines Clubs.}$$

Nehmen Sie eine edf $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\lambda$ (Vgl. Aufgaben 2 und 3 von Blatt 6). Zeigen Sie: Auf der edf $\mathcal{F}$ ist $<^*$ eine antisymmetrische Relation, also eine Halbordnung. Benutzen Sie das Auswahlaxiom, um die Halbordnung $<^*$ zu einer linearen Ordnung $\lhd$ auf $\mathcal{F}$ zu erweitern, und zeigen Sie, dass jedes $f \in \mathcal{F}$ echt weniger als λ $\lhd$-Vorgänger hat.

Aufgabe 3 (8 Punkte, Der Satz von Silver von 1974)**.** Sei λ eine singuläre Kardinalzahl mit überabzählbarer Konfinalität. Wir nehmen an, dass die Menge

$$S = \{\theta < \lambda \,:\, 2^\theta = \theta^+\}$$

stationär in λ ist. Zeigen Sie, dass $2^\lambda = \lambda^+$.

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgaben 2 und 3 von Blatt 6 zusammen mit den Aufgaben 1 und 2 des aktuellen Blattes. Ersetzen Sie den Quantor $\forall \alpha \in \lambda$ and geeigneten Stellen durch $\forall \alpha \in S$.

Anmerkung: Für singuläre Kardinalzahlen abzählbarer Konfinalität gibt es kein Pendant zum Satz von Silver, denn 1977 zeigte Magidor: Unter der Annahme geeigneter großer Kardinalzahlen gibt es eine Forcingerweiterung, in der

$$(\forall n \in \omega)(2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}) \wedge 2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega+1}$$

gilt.

[1] Eine transitive und irreflexive zweistellige Relation, auch Präordnung genannt.