Blatt 8

Abgabe am 12.01.2021 vor 12 Uhr, durch Hochladen auf Ilias im Pfad: Magazin - Lehrveranstaltungen aus HISinOne - WS20 - Math.Inst.-VB - Mengenlehre

Definition. Wir geben eine mengentheoretische Definition der Objekte $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ an.

1. $\mathbb{N} := \omega$,
2. $\mathbb{Z} := \omega \cup \{\langle 1, \langle m, 1\rangle\rangle \,:\, 0 < m < \omega\}$,
3. $\mathbb{Q} := \omega \cup \{\langle l, \langle m, n\rangle\rangle \in \omega \times \omega \times \omega \,:\, (m, n \geq 1 \wedge \mathrm{ggT}(m,n) = 1 \wedge l \in 2 \wedge (l = 0 \rightarrow n \geq 2))\}$,
4. $\mathbb{R} := \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{\emptyset\} \,:\, x$ ist nach oben beschränkt, besitzt kein maximales Element und $\forall p, q \in \mathbb{Q}(p < q \in x \rightarrow p \in x)\}$,
5. $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Bemerkung: Der erste Eintrag $l \in 2$ bei einer rationalen Zahl gibt an, ob es sich um eine negative ($l = 0$) oder positive ($l = 1$) Zahl handelt. $\mathrm{ggT}(m,n)$ steht für den größten gemeinsamen Teiler von m und n.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Rang der Objekte $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$ für $n \in \omega$, in der von-Neumann-Hierachie.

Aufgabe 2. Es seien $\mathscr{L}$ eine abzählbare Sprache und $\mathfrak{B} = (\omega_1, (Z^{\mathfrak{B}} \,:\, Z \in \mathscr{L}))$ eine $\mathscr{L}$-Struktur. Wir schreiben $\alpha \preccurlyeq \mathfrak{B}$, falls es eine $\mathscr{L}$-Struktur

$$\mathfrak{A} = (\alpha, (Z^{\mathfrak{A}} \,:\, Z \in \mathscr{L})) \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

gibt. Zeigen Sie, dass

$$\{\alpha < \omega_1 \,:\, \alpha \preccurlyeq \mathfrak{B}\}$$

club in ω_1 ist.

Hinweis: Sie benötigen den Satz von Löwenheim-Skolem und den Tarski-Vaught-Test. Beide Sätze werden als bekannt voraus gesetzt.

Aufgabe 3. Schätzen Sie die Komplexität folgender Formeln in der Lévy-Hierarchie nach oben ab (mit Hintergrundtheorie ZF):

1. „x ist eine Ordinalzahl “
2. „x ist abzählbar “
3. „y ist die Potenzmenge von x “.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Komplexität der Operationen

a) $x \mapsto \mathrm{tcl}(x)$

b) $x \mapsto \mathrm{rk}(x)$

in der Lévy-Hierarchie (mit Hintergrundtheorie ZF).

Hinweis: Sei $F\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ eine Operation aus der Aufgabenstellung und $\varphi(x,y)$ eine Formel, so dass gilt:

$$\mathsf{ZF} \vdash F \text{ ist eine Operation und } (F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x,y)).$$

Gesucht ist nun die minimale Komplexität von φ in der Lévy-Hierarchie. Eventuell hilft Ihnen der Δ_1-Rekursionssatz.