EXTRABLATT
(29.12.2021)

Aufgabe 1. Sei $(G, \circ)$ eine beliebige endliche Gruppe mit Ordnung n und H eine Untergruppe von G mit Ordnung m. Gibt es immer ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot k = n$?

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgende Matrix in $M_{3,3}(\mathbb{Z}_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_2)$ ist und bestimmen Sie die Ordnung von A.

b) Sei $K = \{A^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0_{M_{3,3}(\mathbb{Z}_2)}\}$. Ist K zusammen mit der Matrizenaddition und -multiplikation ein Körper?

Aufgabe 3. Wir betrachten die unendlichen Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$. Sei G eine echte Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ und H eine echte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$, d.h. es existieren mindestens ein $z \in \mathbb{Z}$ und ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $z \notin G$ und $q \notin H$.

a) Welche Ordnungen kann G besitzen? Kann der Quotientenraum $\mathbb{Z}/G$ unendlich groß sein?

b) Kann der Quotientenraum $\mathbb{Q}/H$ endlich sein?

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Gibt es dann immer eine *bijektive* lineare Abbildung $G : V \to V$, sodass $F \circ G \circ F = F$ ist?

Aufgabe 5. Sei $A \in M_{n,n}(K)$ *nilpotent*, das bedeutet, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $A^m = 0_{M_{n,n}(K)}$. Ist dann auch immer $A^n = 0_{M_{n,n}(K)}$?