Erste Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I (Mildenberger, Bräuninger) vom Wintersemester 2021/22

15.2.2022 von 9:00 bis 11:00.
Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts und der Aufgabenblätter ab. Schreiben Sie auf das Deckblatt und auf jedes Arbeitsblatt Ihren Namen. Sie können die Blätter beidseitig beschreiben. Eine sehr gute Note gibt es etwa mit mindestens 80% der Punkte. Bei den offenen Fragen gibt richtiges Raten ohne Begründung schon einen Punkt. Eine falsche Entscheidung gibt keinen Abzug, schreiben Sie also Ihre Intuition nieder.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte maximal	12	8	10	8	12	50
Punkte bearbeitet						
Punkte erreicht						

Aufgabe 1. (12 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind, und geben Sie dazu eine Begründung in ein oder zwei Sätzen an.

1. Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gilt
$$\dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(W).$$
2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Dann existiert eine Basis $B' \subseteq B$ von U.
3. Es seien V und W zwei K-Vektorräume mit gleicher Dimension n. Dann sind V und W isomorph.
4. Es sei A eine beliebige Matrix. Dann hat A denselben Rang wie ihre transponierte Matrix $A^\top$.
5. Für $n \geq 2$ besteht die symmetrische Gruppe S_n aus einer geraden Anzahl an Elementen.
6. Es seien A und B zwei quadratische Matrizen. Dann gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Wir betrachten die folgende 4×4-Matrix mit reellen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die inverse Matrix von A an (4 Punkte) und berechnen Sie die Determinante von A (4 Punkte).

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Es seien $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ und $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ Körper mit zwei und mit drei Elementen. Wir betrachten auf der Menge $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ die Operationen $\bar{+}$ und $\bar{\cdot}$ definiert durch

$$(a, b) \mathbin{\bar{+}} (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d) \quad \text{und}$$
$$(a, b) \mathbin{\bar{\cdot}} (c, d) = (a \cdot_2 c, b \cdot_3 d).$$

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \bar{+})$ eine abelsche Gruppe ist.

b) (3 Punkte) Ist $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \bar{+}, \bar{\cdot})$ ein Körper?

c) (4 Punkte) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \bar{+}) \cong (\mathbb{Z}_n, +_n)$?

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Ist dann der Kern von f zwangsläufig ein Komplementärraum des Bildes von f, gilt also

$$V = f[V] \oplus \operatorname{Kern}(f)?$$

Aufgabe 5. (12 Punkte)
Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir betrachten zusätzlich die Abbildungen

$$\pi : V \to V/\operatorname{Kern}(f), \quad v \mapsto v + \operatorname{Kern}(f) \quad \text{und}$$
$$\bar{f} : V/\operatorname{Kern}(f) \to f[V], \quad v + \operatorname{Kern}(f) \mapsto f(v),$$

sowie die dualen Abbildungen f^*, π^* und $(\bar{f})^*$.

a) (1 Punkt) Geben Sie den Definitionsbereich und den Zielbereich von π^*, f^* und von $(\bar{f})^*$ an.

b) (2 Punkte) Ist π^* injektiv?

c) (2 Punkte) Ist $(\bar{f})^*$ bijektiv?

d) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass das Bild von f^* gerade dem Bild von $\pi^* \circ (\bar{f})^*$ entspricht, das heißt

$$f^*[W^*] = (\pi^* \circ (\bar{f})^*)[f[V]^*].$$

e) (2 Punkte) Folgern Sie daraus, dass das Bild von f isomorph zum Bild von f^* ist, also

$$f[V] \cong f^*[W^*].$$