BLATT 1

(19.10.2021)

Begründen Sie alle Ihre Antworten mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel. Die richtige Entscheidung alleine genügt nicht.

Aufgabe 1. Betrachten Sie auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ die folgende Verknüpfung:

$$a * b = ab + 2a + 2b + 2.$$

a) Ist $(\mathbb{Q}, *)$ kommutativ?

b) Ist $(\mathbb{Q}, *)$ assoziativ?

c) Besitzt $(\mathbb{Q}, *)$ ein neutrales Element?

d) Ist $(\mathbb{Q}, *)$ eine Gruppe?

Aufgabe 2. Sei $G = \{a, b, c, d\}$ eine Menge mit exakt vier Elementen und $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe derart, dass

$\cdot$	a	b	c	d
a	b			c
b			c	
c				a
d		d		

Ergänzen Sie die obige Tabelle und bestimmen Sie das neutrale Element der Gruppe.

Aufgabe 3. Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Funktionen, sodass $g \circ f$ bijektiv ist.

a) Ist f im Allgemeinen injektiv?

b) Ist f im Allgemeinen surjektiv?

c) Ist g im Allgemeinen injektiv?

d) Ist g im Allgemeinen surjektiv?

Aufgabe 4. Beweisen Sie folgende (Un-)Gleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion.

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

c) Für $n \geq 6$ gilt $3^n > 2n^3$.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 26.10.2021, 12 Uhr.