BLATT 2
(26.10.2021)

Es seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, *, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung $\Phi : G \to H$ heißt *(Gruppen-) Homomorphismus* von G nach H falls folgendes gilt:

$$\forall a, b \in G : \Phi(a \circ b) = \Phi(a) * \Phi(b).$$

Sei $\Phi : G \to H$ solch ein Homomorphismus. Wir definieren den *Kern* von Φ durch

$$\mathrm{Kern}(\Phi) = \Phi^{-1}[\{e_H\}] = \{a \in G \mid \Phi(a) = e_H\}.$$

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Seien $(G, \circ, e_G)$, $(H, *, e_H)$ Gruppen und $\Phi : G \to H$ ein Homomorphismus.

a) Ist $\Phi(e_G) = e_H$?

b) Sei $h \in H$, sodass $\Phi^{-1}[\{h\}] := \{a \in G \mid \Phi(a) = h\}$ nicht leer ist und $g \in \Phi^{-1}[\{h\}]$. Zeigen Sie, dass sich jedes Element von $\Phi^{-1}[\{h\}]$ als Produkt von g mit einem Element aus dem Kern von Φ schreiben lässt.

c) Nun sei Φ injektiv. Ist dann $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{e_G\}$? Gilt auch die Umkehrung?

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ so, dass $(H, \circ)$ eine Gruppe ist. Dann heißt $(H, \circ)$ *Untergruppe* von $(G, \circ)$. Da die Verknüpfung in beiden Gruppen gleich ist sagen vereinfacht auch, dass H eine Untergruppe von G ist. Ferner schreiben wir b^{-1} für das Inverse von $b \in G$. Benutzen Sie das folgende Kriterium für Untergruppen: Eine Teilmenge $H \subseteq G$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn

$$H \neq \emptyset \text{ und } \forall a, b \in H : a \circ b^{-1} \in H.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Ist das *Zentrum* von G

$$\mathcal{Z}(G) = \{a \in G \mid \forall g \in G : g \circ a = a \circ g\}$$

eine Untergruppe von G?

b) Seien $(G, \circ)$, $(H, *)$ Gruppen und $\Phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Ist $(\mathrm{Kern}(\Phi), \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

a) Gibt es Menge K mit mindestens zwei Elementen und zweistelligen Abbildungen $+, \cdot$ auf K und Elemente x_0, x_1 in K, so dass sowohl $(K, +, x_0)$ als auch $(K, \cdot, x_1)$ Gruppen sind und zusätzlich das Distributivgesetz gilt, also

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \text{ für alle } x, y, z \in K?$$

b) Ist $(\mathbb{Z}_8, +_8, \cdot_8)$ ein Körper?

Bemerkung: Man schreibt statt $\Phi^{-1}[\{h\}]$ auch oft nur $\Phi^{-1}(h)$, obwohl Φ nicht unbedingt injektiv ist und für injektive Φ in der Vorlesung $\Phi^{-1}(h)$ abweichend vom Obigen definiert ist.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 02.11.2021, 12 Uhr.