**BLATT 4**
(09.11.2021)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Es sei $V$ ein Vektorraum und $B \subseteq V$ eine Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen sind gleichwertig?

i) $B$ ist eine Basis von $V$.

ii) $B$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $V$, d.h. $B$ ist linear unabhängig und für jedes $x \in V \setminus B$ ist $B \cup \{x\}$ linear abhängig.

iii) $B$ ist ein minimales Erzeugendensystem von $V$, d.h. es gilt $V = \operatorname{span}(B)$ und $\operatorname{span}(B \setminus \{x\}) \neq V$ für alle $x \in B$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Wir betrachten für $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die zwei Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^k$.

a) Können Sie eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf der Menge $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k\}$ angeben?

b) Geben Sie eine Basis für Ihren Vektorraum an.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Es sei $X$ eine nicht leere Menge. Wir definieren eine Relation $\subseteq^*$ zwischen Teilmengen von $X$ wie folgt: Seien $A, B \subseteq X$, dann ist

$$A \subseteq^* B \Leftrightarrow A \setminus B \text{ ist endlich.}$$

a) Ist $\subseteq^*$ reflexiv?

b) Ist $\subseteq^*$ antisymmetrisch?

c) Ist $\subseteq^*$ transitiv?

d) Was können Sie über die Relation $\subseteq^*$ sagen, falls $X$ endlich ist?

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Es sei $p$ prim und $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ der Körper mit genau $p$ Elementen. Wir betrachten den $\mathbb{Z}_p$-Vektorraum $\mathbb{Z}_p^{(\mathbb{N})} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_0 : f(k) = 0\}$ mit komponenterweiser Addition und skalarer Multiplikation, d.h. für $f, g \in \mathbb{Z}_p^{(\mathbb{N})}$, $a \in \mathbb{Z}_p$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(f + g)(n) = f(n) +_p g(n),$$
$$(a \cdot f)(n) = a \cdot_p f(n).$$

Geben Sie eine Basis von $\mathbb{Z}_p^{(\mathbb{N})}$ an.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 16.11.2021, 12 Uhr.