BLATT 5
(16.11.2021)

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Es sei X eine nicht leere Menge.

a) Gibt es eine Relation auf X die symmetrisch und transitiv ist, aber nicht reflexiv?

b) Für $A, B \subseteq X$ definieren wir eine Relation $=^*$ durch

$$A =^* B \Leftrightarrow A \subseteq^* B \text{ und } B \subseteq^* A,$$

dabei ist

$$A \subseteq^* B \Leftrightarrow A \setminus B \text{ ist endlich.}$$

Ist die Relation $=^*$ eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Wir definieren für $a, b \in G$ die Relation

$$a \sim_U b \Leftrightarrow a \circ b^{-1} \in U,$$

wobei b^{-1} das Inverse von b in G ist.

a) Zeigen Sie, dass $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation auf G ist.

b) Ab nun sei G abelsch, und sei $a \in G$. Ist die Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim_U$ gleich der Nebenklasse von a bezüglich U, also

$$[a]_{\sim_U} = a \circ U = \{a \circ u \mid u \in U\}?$$

Wie bei Vektorräumen schreiben wir G/U für die Menge der Äquivalenzklassen, also

$$G/U = \{[a]_{\sim_U} \mid a \in G\}.$$

c) Zeigen Sie: Wenn G abelsch ist, dann ist auf der Menge G/U durch

$$[a]_{\sim_U} \bar{\circ} [b]_{\sim_U} := [a \circ b]_{\sim_U}$$

eine Operation definiert, die $(G/U, \bar{\circ})$ zu einer eine abelschen Gruppe macht.

d) Erinnerung: Die Ordnung einer Gruppe ist die Mächtigkeit ihrer Trägermenge. Kann die Gruppe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \bar{+})$ von endlicher Ordnung sein?

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 23.11.2021, 12 Uhr.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a \in G$. Wir setzen $a^0 = e_G$ und für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a^n = a \circ a \circ \cdots \circ a \text{ (n Faktoren)}, \qquad a^{-n} = (a^{-1})^n,$$

wobei a^{-1} das zu a inverse Element in G ist. Falls eine natürliche Zahl n existiert für die $a^n = e_G$ gilt, so sagen wir *a hat endliche Ordnung* und die kleinste solche Zahl heißt *die Ordnung von a*. Andernfalls sagen wir *a hat unendliche Ordnung.* Ferner definieren wir das Erzeugnis von a,

$$\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle a \rangle$ eine Untergruppe von G ist.

b) Sei $\langle a \rangle$ von endlicher Ordnung. Hat dann auch a endliche Ordnung? Was ist mit der umgekehrten Richtung?

c) Gibt es ein Element von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit unendlicher Ordnung?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Falls das neutrale Element der Multiplikation 1 endliche Ordnung n in $(K, +)$ hat, so sagen wir, dass K die *Charakteristik* n hat. Andernfalls hat K die Charakteristik 0.

a) Sei p eine Primzahl. Welche Charakteristik hat der Körper $\mathbb{Z}_p$?

b) Gibt es einen Körper, dessen Charakteristik weder 0 noch eine Primzahl ist?
Hinweis: Seien $a, b \in K \setminus \{0\}$, kann dann $a \cdot b = 0$ sein?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 23.11.2021, 12 Uhr.