BLATT 8
(7.12.2021)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine Abbildung gegeben durch: Für alle x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung ist.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}_{\vec{E}_3}^{\vec{E}_4}(F)$ von F bezüglich der angeordneten Standardbasen $\vec{E}(e_1, e_2, e_3)$ und $\vec{E}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ an.

c) Geben Sie Basen des Kerns von F sowie des Quotientenraums $\mathbb{R}^3/\operatorname{Kern}(F)$ an.

d) Können Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^3/\operatorname{Kern}(F)$ und dem Bild von F angeben?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende 4×4 Matrix mit reellen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

a) Bestimmen Sie $A^2 = A \cdot A$.

b) Bestimmen Sie A^3 und A^4.

c) Sei nun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig und $B = (\beta_{i,j})_{i,j \leq n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit $\beta_{i,j} = 0$ für alle $j \leq i$. Bestimmen Sie B^n.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 14.12.2021, 12 Uhr.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Es seien $\vec{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die geordnete Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ die geordnete Basis mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch $f(e_i) = b_i$ eindeutig festgelegt wird. Bestimmen Sie die folgenden Darstellungsmatrizen:

a) $\mathrm{Mat}^{\vec{B}}_{\vec{E}}(f)$.

b) $\mathrm{Mat}^{\vec{E}}_{\vec{E}}(f)$.

c) $\mathrm{Mat}^{\vec{E}}_{\vec{B}}(f)$.

d) Können Sie beschreiben, wie man mit dem Lösen von linearen Gleichungssystemen und dem Gauß-Algorithmus solch eine Darstellungsmatrix bestimmen kann?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 14.12.2021, 12 Uhr.