BLATT 9
(14.12.2021)

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Es seien K ein Körper, $m, n \geq 1$ und $A =\in M_{n,m}(K)$. Die Matrix $A^T \in M_{m,n}(K)$ ist die *transponierte Matrix* von A und entsteht durch das vertauschen der Zeilen und Spalten von A, das heißt A^T wird definiert durch

$$\alpha^T_{i,j} = \alpha_{j,i} \text{ für } i \leq m \text{ und } j \leq n.$$

a) Es seien zusätzlich $r \geq 1$ und $B \in M_{m,r}(K)$. Gilt dann im Allgemeinen $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$?

b) Sei nun $m = n$ und A invertierbar, also

$$A \in \mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_{n,n}(K) \mid \exists A^{-1} : A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1_{M_{n,n}(K)}\}.$$

Ist dann auch A^T invertierbar?

c) Wir betrachten die Menge

$$H = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A \cdot A^T = 1_{M_{n,n}(K)}\}.$$

Ist H eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$?

d) Sei nun $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Gibt es eine Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in H$ mit

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma \notin \{-1, 1\}?$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei X eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass die Signatur $\mathrm{sign}\colon \mathrm{Sym}(X) \to \{-1, 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathrm{Sym}(X), \circ)$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ist.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 21.12.2021, 12 Uhr.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Ein *magisches Quadrat* ist eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

sodass die Summe der Elemente in jeder Spalte, in jeder Zeile und in jeder Diagonalen jeweils den gleichen Wert $S(A) \in \mathbb{R}$ haben.

a) Zeigen Sie, dass die Menge aller magischen Quadrate, also

$$\mathcal{M} = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist ein magisches Quadrat}\},$$

ein Untervektorraum von $M_{3,3}(\mathbb{R})$ ist.

b) Gilt für alle $A \in \mathcal{M}$ die Gleichung $\alpha_{2,2} = \frac{S(A)}{3}$?

c) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{M}$, indem Sie eine Basis angeben.
Hinweis: Betrachten Sie die definierende Bedingung für ein magisches Quadrat als ein lineares Gleichungssystem.

d) Gibt es ein magisches Quadrat, dessen Einträge aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und 9 bestehen?