BLATT 10
(11.1.2022)

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Sei $(G, *)$ eine endliche Gruppe. Mit $S(G)$ bezeichnen wir die Gruppe der Permutationen von G mit der Komposition als Verknüpfung. Wir definieren für $g \in G$ die Abbildung

$$\varphi_g \colon G \to G,\ h \mapsto g * h.$$

(Am Dienstag um 12 Uhr umgedreht!)

a) Zeigen Sie, dass φ_g bijektiv ist und somit $\varphi_g \in S(G)$.

Wir betrachten nun die folgende Abbildung

$$\Phi : G \to S(G), g \mapsto \varphi_g.$$

b) Ist Φ ein Homomorphismus von $(G, *)$ nach $(S(G), \circ)$?

c) Ist Φ injektiv?

d) Ist Φ ein Isomorphismus?

e) Sei nun $(G, *)$ eine unendliche Gruppe. Ist dann φ_g immer noch bijektiv? Falls ja, ändert sich eine der Antworten aus den letzten drei Teilaufgaben?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Wir betrachten für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Matrix $A_n = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Also ist A_n folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Sei $n > 2$. Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ gilt.

b) Berechnen Sie $\det(A_n)$.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str. 1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 18.1.2022, 12 Uhr.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und $A, B \in M_{n,n}(K)$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir definieren die *Spur* einer quadratischen Matrix A durch

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}.$$

a) Gilt im Allgemeinen $\operatorname{Spur}(A \cdot B) = \operatorname{Spur}(B \cdot A)$?

b) Es seien A und B nun ähnlich. Ist dann $\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(B)$?

c) Ist $\det(A) = \det(B)$, falls A und B ähnlich sind?