Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Christian Bräuninger

BLATT 11

(18.1.2022, Hinweise am 19.1. ergänzt)

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien V^* und W^* die dualen Vektorräume von V bzw. W. Dann definieren wir die duale Abbildung $f^*\colon W^* \to V^*$ von f durch

$$f^*(\lambda)(v) = \lambda(f(v)) \text{ für jedes } \lambda \in W^* \text{ und } v \in V.$$

a) Zeigen Sie, dass f^* eine lineare Abbildung ist.

b) Gilt $\dim(\mathrm{Kern}(f^*)) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(W) - \dim(V)$?
Hinweis: Hierfür kann man zum Beispiel erst die Aussage $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Bild}(f^*))$ auf ihre Wahrheit hin untersuchen und mit Komplementärräumen arbeiten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Die duale Abbildung zur Inklusion $\mathrm{id}\colon U \to V$ ist nach Aufgabe 1 a) eine lineare Abbildung $p\colon V^* \to U^*$.

a) Ist p surjektiv?

b) Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(p) \cong (V/U)^*$.

c) Zeigen Sie: $U^* \cong V^*/(V/U)^*$.
Hinweis: Hierzu kann man die Dimensionsformeln und den Noether'schen Isomorphiesatz heranziehen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $T_n \subseteq M_{n,n}(K)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen.

a) Zeigen Sie, dass T_n ein Unterraum von $M_{n,n}(K)$ ist.

b) Es seien $A, B \in T_n$. Ist dann auch $A \cdot B \in T_n$?

c) Es sei $A \in T_n \cap \mathrm{GL}_n(K)$. Ist dann auch $A^{-1} \in T_n$?

d) Es sei $T_n' = \{A \in T_n \mid \det(A) \neq 0\}$. Ist T_n' eine Gruppe?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 25.1.2022, 12 Uhr.