BLATT 12

(25.1.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** a) Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ gegeben durch

$$\lambda_1(e_1) = 3,\ \lambda_1(e_2) = 2,\ \lambda_1(e_3) = 1,$$
$$\lambda_2(e_1) = 1,\ \lambda_2(e_2) = 2,\ \lambda_2(e_3) = 2,$$
$$\lambda_3(e_1) = 2,\ \lambda_3(e_2) = 1,\ \lambda_3(e_3) = 2.$$

Sind λ_1, λ_2 und λ_3 linear unabhängig?

b) Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in ({\mathbb{Z}_7}^3)^*$ gegeben durch dieselbe Definition wie in Teil a). Sind dann λ_1, λ_2 und λ_3 linear unabhängig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ definieren wir

$$U^\perp = \{\lambda \in V^* \ \mid\ U \subseteq \mathrm{Kern}(\lambda)\}.$$

Seien nun $U, U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Gleichungen:

a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

b) $(U^\perp)^\perp = U$.

c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

d) $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim V$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Für einen Unterraum $U \subseteq V^*$ des Dualraums von V definieren wir

$$U^\perp = \{v \in V \ \mid\ \lambda(v) = 0 \text{ für alle } \lambda \in U\}.$$

Seien nun $U, U_1, U_2 \subseteq V^*$ Unterräume. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Gleichungen:

a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

b) $(U^\perp)^\perp = U$.

c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

d) $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim V$.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 1.2.2022, 12 Uhr.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen und $f^* : W^* \to V^*$ die zugehörige duale Abbildung. Gibt es dann einen Isomorphismus zwischen dem Quotientenraum des Bildes von f^* und dem Dualraum des Kerns von f; gilt also

$$V^*/f^*[W^*] \cong (\mathrm{Kern}(f))^*?$$