BLATT 13

(Alternative Fassung vom 3.2.2022, alle Punkte auf diesem Blatt sind Bonuspunkte)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome und $\varphi : \mathbb{R}[x] \to (\mathbb{R}[x])^*$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\varphi(x^i)(x^j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j, \\ 1 & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

a) Ist φ injektiv?

b) Ist φ surjektiv?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien V und W n-dimensionale Vektorräume und $B : V \times W \to K$ eine Bilinearform mit

$$\forall v (\forall w \; B(v, w) = 0 \to v = 0).$$

Ist B nicht ausgeartet?

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Für zwei Vektoren $x, y \in K^k$ definieren wir

$$(x, y)_k = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_k)$ und $y = (y_1, \ldots, y_k)$ sind. Ebenfalls seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$.

a) Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i \leq m, j \leq n} \in M_{m,n}(K)$. Zeigen Sie, dass $\alpha_{i,j} = (A \cdot e_j, e'_i)_m$ für alle $i \leq m$ und $j \leq n$ gilt, wobei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des K^n und $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ die Standardbasis des K^m ist.

b) Schließen Sie daraus, dass für jede Matrix $A \in M_{m,n}(K)$ die transponierte Matrix A^T das einzige Element aus $M_{n,m}(K)$ ist, für das gilt:

$$(A \cdot x, y)_m = (x, A^T \cdot y)_n \quad \text{für alle } x \in K^n \text{ und } y \in K^m.$$

c) Sei nun $B : K^n \times K^n \to K$ eine beliebige Bilinearform. Gibt es dann für jede Matrix $A \in M_{n,n}(K)$ eine eindeutige Matrix $A' \in M_{n,n}(K)$, sodass

$$B(A \cdot x, y) = B(x, A' \cdot y) \quad \text{für alle } x, y \in K^n?$$

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 8.2.2022, 12 Uhr.