Probeklausur

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind und geben Sie dazu eine Begründung in 1-2 Sätzen an.

1. Es existiert ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.

   Wahr. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 0$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

   Bemerkung: Das ist auch der einzige solche Gruppenhomomorphismus. Für jede andere Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wäre f ein Gruppenhomomorphismus, so wäre

$$z = f\left(\underbrace{\frac{x}{|z|+1} + \cdots + \frac{x}{|z|+1}}_{|z|+1-mal}\right) = \underbrace{f\left(\frac{x}{|z|+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{|z|+1}\right)}_{|z|+1-mal}$$

   und damit auch $f\left(\frac{x}{|z|+1}\right) = \frac{z}{|z|+1} \notin \mathbb{Z}$, ein Widerspruch.

2. Es gibt keine nichtleere Relation die irreflexiv, tansitiv und symmetrisch ist.

   Wahr. Nehme an, $\sim$ wäre eine Relation mit diesen Eigenschaften. Da $\sim$ nicht leer is,t existieren a, b mit $a \sim b$, wegen der Symmetrie auch $b \sim a$ und mit der Transitivität dann $a \sim a$, ein Widerspruch zur Irreflexivität.

3. Die Menge $\{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ ist eine Untergruppe von S_n.

   Wahr. Die Menge ist offensichtlich nicht leer da $\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1$ und da $\operatorname{sign} : S_n \to (\{-1, 1\}, \cdot)$ ein Homomorphismus ist (Blatt 9 Aufgabe 2), gilt für $\sigma, \pi \in S_n$ mit $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\pi) = 1$ auch

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\pi)^{-1} = 1.$$

   Nach dem Untergruppenkriterium ist $\{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ also eine Untergruppe von S_n.

4. Es sei V ein Vektorraum und E ein Erzeugendensystem von V mit n Elementen. Dann hat V höchstens Dimension n.

   Wahr. Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem (siehe auch Blatt 3 Aufgabe 1), also enthält E eine Basis B. Nun ist $\dim(V) = |B| \leq n$.

5. Es seien K ein Körper und $A, B \in M_{n,n}(K)$ so, dass $A \cdot B$ regulär ist. Dann sind auch A und B regulär.

   Wahr. Da $A \cdot B$ regulär ist gilt (zusammen mit Blatt 7 Aufgabe 3b))

   $$n = \mathrm{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\},$$

   also auch $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = n$.

6. Die Menge der Polynome von Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ sind ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

   Wahr. Seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ von Grad $\leq n$, dann existieren also $p_i, q_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$ mit

   $$P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i,\ Q = \sum_{i=0}^{n} q_i X^i.$$

   Sind nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so ist

   $$\alpha \cdot P + \beta \cdot Q = \alpha \left(\sum_{i=0}^{n} p_i X^i \right) + \beta \left(\sum_{i=0}^{n} q_i X^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha p_i X^i + \beta q_i X^i) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha p_i + \beta q_i) X^i$$

   ebenfalls ein Polynom von Grad $\leq n$.

Aufgabe 2. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch:

$$F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_{\vec{E}}^{\vec{E}}(F)$ bezüglich der Standardbasis $\vec{E}$ des $\mathbb{R}^3$ sowie eine Basis für den Kern von F an.

Zunächst berechnen wir die Bilder der Standardvektoren unter F. Dazu schreiben wir der Übersicht halber

$$b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Da wir $M_{\vec{E}}^{\vec{E}}(F)$ berechnen wollen, stellen wir die Bilder der Standardbasis nun als Linearkombination der Standardbasis dar:

$$\begin{aligned}
F(e_1) &= F(\frac{1}{2}(b_2 + b_3 - b_1)) = \frac{1}{2}(F(b_2) + F(b_3) - F(b_1)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\
F(e_2) &= F(\frac{1}{2}(b_1 + b_3 - b_2)) = \frac{1}{2}(F(b_1) + F(b_3) - F(b_2)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \\
F(e_3) &= F(\frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3)) = \frac{1}{2}(F(b_1) + F(b_2) - F(b_3)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = e_1 + e_3
\end{aligned}$$

Da die Spalten der Darstellungsmatrix gerade aus den Bildern der Standardbasiselemente (in Darstellungsform der Standardbasis) besteht, erhalten wir also

$$M_{\vec{E}}^{\vec{E}}(F) = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 0\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Nun zum Kern von F. Wir machen zunächst folgende Beobachtung: Durch das Addieren der ersten beiden Zeilen erhält man die dritte Zeile, wir haben also

$$M_{\vec{E}}^{\vec{E}}(F) = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 0\\3 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

womit $M_{\vec{E}}^{\vec{E}}(F)$ den Rang 2 hat. Das bedeutet auch dass das Bild $F[\mathbb{R}^3]$ die Dimension 2 hat. Mit Hilfe der Dimensionsformel wissen wir nun, dass der Kern von F die Dimension 1 hat. Um ein nicht-triviales Element des Kerns zu (und damit eine Basis) zu finden, kann man den Gaußalgorithmus anwenden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ist nun $v = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3$ im Kern von F, so ist $2 \cdot \alpha_1 = -\alpha_2$ und $5 \cdot \alpha_2 = \alpha_3$. Setzt man nun $\alpha_1 = 1$ ein, so erhält man $\alpha_2 = -2$ und $\alpha_3 = -5$ und somit $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als Kernelement. Zur Kontrolle rechnet man noch einmal nach:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da der Kern Dimension 1 hat ist damit auch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ schon eine Basis des Kerns.

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W. Seien ferner U_1 ein Unterraum von V und U_2 ein Unterraum von W. Existiert dann immer ein $\bar{F}$ zwischen den Quotienenräumen V/U_1 und W/U_2 so dass das folgende Diagramm kommutiert?

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_{U_1}"'] & W \arrow[d, "\pi_{U_2}"] \\
V/U_1 \arrow[r, "\bar{F}"'] & W/U_2
\end{tikzcd}$$

Falls nein, können Sie ein Kriterium für die Existenz eines solchen $\bar{F}$ angeben?

So ein $\bar{F}$ existiert nicht immer. Ein einfaches Gegenbeispiel wäre zum Beispiel $V = W$, $F = \mathrm{id}$, $U_1 = V$ und $U_2 = \{0_V\}$. Dann ist für beliebiges $v \in V$ und jede lineare Abbildung $(\bar{F} \circ \pi_{U_1})(v) = \{0_V\}$ aber auch $(\pi_{U_2} \circ F)(v) = \{v\}$.
Genauer gilt folgendes: Es gibt genau dann eine lineare Abbildung $\bar{F} : V/U_1 \to W/U_2$, so dass das obige Diagramm kommutiert (also mit $\bar{F} \circ \pi_{U_1} = \pi_{U_2} \circ F$), falls $F[U_1] \subseteq U_2$ gilt.
Nehme an, es gilt $F[U_1] \subseteq U_2$. Dann definieren wir $\bar{F}$ durch

$$\bar{F}([v]_{\sim_{U_1}}) = [F(v)]_{\sim_{U_2}}.$$

Zuerst zeigen wir, dass dies wohldefiniert ist: Sind $v_1, v_2 \in V$ beliebig mit $u = v_1 - v_2 \in U_1$. Da $F[U_1] \subseteq U_2$ gilt ist also $F(u) \in U_2$ und wir haben somit

$$\begin{aligned}
\bar{F}([v_1]_{\sim_{U_1}}) &= [F(v_1)]_{\sim_{U_2}} = [F(u+v_2)]_{\sim_{U_2}} = [F(u) + F(v_2)]_{\sim_{U_2}} \\
&= [F(u)]_{\sim_{U_2}} \bar{+} [F(v_2)]_{\sim_{U_2}} = [F(v_2)]_{\sim_{U_2}} \\
&= \bar{F}([v_2]_{\sim_{U_1}}).
\end{aligned}$$

Somit ist $\bar{F}$ wohldefiniert. Außerdem ist $\bar{F}$ aufgrund der Linearität sowie der Definitionen der Addition und der skalaren Multiplikation im Quotientenraum eine lineare Abbildung: Seien $\alpha, \beta \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\alpha \,\bar{\cdot}\, [v_1]_{\sim_{U_1}} \bar{+} \beta \,\bar{\cdot}\, [v_2]_{\sim_{U_1}}) &= \bar{F}([\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2]_{\sim_{U_1}}) \\
&= [F(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2)]_{\sim_{U_2}} \\
&= [\alpha \cdot F(v_1) + \beta \cdot F(v_2)]_{\sim_{U_2}} \\
&= \alpha \,\bar{\cdot}\, [F(v_1)]_{\sim_{U_2}} \bar{+} \beta \,\bar{\cdot}\, [F(v_2)]_{\sim_{U_2}} = \alpha \,\bar{\cdot}\, \bar{F}([v_1]_{\sim_{U_1}}) \bar{+} \beta \,\bar{\cdot}\, \bar{F}([v_2]_{\sim_{U_1}}).
\end{aligned}$$

Sei umgekehrt nun $F[U_1] \nsubseteq U_2$, d.h. es existiert ein $w \in F[U_1] \setminus U_2$. Sei $v \in U_1$ mit $F(v) = w$ und $\bar{F} : V/U_1 \to W/U_2$ eine beliebige lineare Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\bar{F} \circ \pi_{U_1})(v) &= \bar{F}(\pi_{U_1}(v)) = \bar{F}([0_V]_{\sim_{U_1}}) = [0_W]_{\sim_{U_2}} \\
&\neq [w]_{\sim_{U_2}} = [F(v)]_{\sim_{U_2}} = \pi_{U_2}(F(v)) = (\pi_{U_2} \circ F)(v),
\end{aligned}$$

also kommutiert das Diagramm nicht.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die $(n \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ a & a & b & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a & a \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von a und b.

Es gibt vier mögliche Fälle für den Rang von A.

$a = 0$, $b = 0$: In diesem Fall ist A die Nullmatrix und hat Rang 0.

$a = 0$, $b \neq 0$: In diesem Fall ist A eine obere Dreiecksmatrix und man kann den Rang $n-1$ direkt ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & \dots & b \\ 0 & 0 & b & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$, $b = a$: In diesem Fall sind alle Zeilen zwar nicht komplett 0, aber linear abhängig, also hat A Rang 1:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a & a & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \ddots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a & a \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$, $b \neq a$: Die Matrix A hat den selben Rang wie die transponierte A^T. Diese kann man in diesem Fall leicht in eine obere Dreiecksmatrix umformen, indem man das $(-\frac{b}{a})$-fache der ersten Zeile auf alle anderen addiert, also

$$A^T = \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ b & a & a & \ddots & \vdots \\ b & b & a & \ddots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ 0 & a-b & a-b & \dots & a-b \\ 0 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a-b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Da $a - b \neq 0$ (wegen $a \neq b$) gilt, hat A^T also Rang n und somit auch A.

Aufgabe 5. Es seien G, H, K Gruppen und $f : G \to H,\ g : H \to K$ Abbildungen. Die Abbildungen g und $g \circ f$ seien Gruppenhomomorphismen und g zusätzlich injektiv.
Ist nun auch f ein Gruppenhomomorphismus?

Ja, f ist auch ein Gruppenhomomorphismus. Wir schreiben $*_G$ für die Gruppenoperation in G, genauso schreiben wir $*_H$ und $*_K$ für die Gruppenoperationen in H bzw. K.
Seien $a, b \in G$ beliebig. Da $g \circ f$ nach Voraussetzung ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt

$$g(f(a *_G b)) = g(f(a)) *_K g(f(b)).$$

Außerdem ist g ein Gruppenhomomorphismus, also gilt auch

$$g(f(a) *_H f(b)) = g(f(a)) *_K g(f(b)).$$

Beide Zeilen zusammengefasst ergeben

$$g(f(a *_G b)) = g(f(a) *_H f(b)).$$

Da g injektiv ist, folgt daraus

$$f(a *_G b) = f(a) *_H f(b),$$

also ist f tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus.