Zweite Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I (Bräuninger, Mildenberger) vom Wintersemester 2021/22

6.4.2022 von 9:00 bis 11:00 im Rundbau.
Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts und der Aufgabenblätter ab. Schreiben Sie auf das Deckblatt und auf jedes Arbeitsblatt Ihren Namen. Sie können die Blätter beidseitig beschreiben. Eine sehr gute Note gibt es etwa mit mindestens 80% der Punkte. Bei den offenen Fragen gibt richtiges Raten ohne Begründung schon einen Punkt. Eine falsche Entscheidung gibt keinen Abzug, schreiben Sie also Ihre Intuition nieder.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte maximal	12	8	10	8	12	50
Punkte erreicht						

Aufgabe 1. (12 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind, und geben Sie dazu eine Begründung in ein oder zwei Sätzen an.

1. Es sei $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen. Dann ist $\dim(V) \leq \dim(W)$.
2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum von V und B eine Basis von U. Dann existiert eine Basis $B' \supseteq B$ von V.
3. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein Körper.
4. Es sei K ein Körper und $A \in M_{n,n}(K)$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Dann ist $\det(A) \neq 0$.
5. Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
6. Es sei $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen. Dann besitzt die duale Abbildung f^* genau dann eine Umkehrabbildung, wenn f injektiv ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ für $k = 2$ und geben sie ein $k \in \mathbb{R}$ an, für welches das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung besitzt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2(k-1)x_3 & = & 3 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & k\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung.

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ existiert.

b) (2 Punkte) Ist solch eine Abbildung g aus Teil a) immer injektiv?

c) (4 Punkte) Gilt für eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ wie in Teil a) automatisch
$$V = g[W] \oplus \mathrm{Kern}(f)?$$

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) (4 P.) $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f \circ f) \implies f[V] \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$.

b) (4 P.) $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f \circ f) \impliedby f[V] \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$.

Aufgabe 5. (12 Punkte)
Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Wir betrachten die folgenden Teilmengen des K^3:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(a,b,c) \in K^3 \ : \ a+b+c=0\}, \\ U_2 &= \{(a,b,c) \in K^3 \ : \ a \cdot b + c = 0\}, \\ U_3 &= \{(a,b,c) \in K^3 \ : \ a+b = c \cdot c\}. \end{aligned}$$

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass U_1 ein Untervektorraum von K^3 ist und geben Sie eine Basis an.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass U_2 und U_3 für $K = \mathbb{Q}$ keine Untervektorräume sind.

c) (2 Punkte) Gibt es einen Körper K, sodass U_2 ein Untervektorraum von K^3 ist?

d) (2 Punkte) Gibt es einen Körper K, sodass U_3 ein Untervektorraum von K^3 ist?

e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass U_3 genau dann eine *Untergruppe* von $(K^3, +)$ ist, wenn K Charakteristik 2 hat, d.h. es gilt $1_K + 1_K = 0_K$.