Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Christian Bräuninger

Probeklausur

(2 Stunden Bearbeitungszeit, ein DinA4-Blatt mit Notizen eigener Wahl ist als Hilfmittel erlaubt)

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind und geben Sie dazu eine Begründung in ein oder zwei Sätzen an.

1. Es existiert ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Es gibt keine nicht leere Relation die irreflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

3. Die Menge $\{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ ist eine Untergruppe von S_n.

4. Es sei V ein Vektorraum und E ein Erzeugendensystem von V mit n Elementen. Dann hat V höchstens Dimension n.

5. Es seien K ein Körper und $A, B \in M_{n,n}(K)$ so, dass $A \cdot B$ regulär ist. Dann sind auch A und B regulär.

6. Die Menge der Polynome von Grad $\leq n$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ sind ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 2. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch:

$$F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_{\vec{E}}^{\vec{E}}(F)$ bezüglich der Standardbasis $\vec{E}$ des $\mathbb{R}^3$ sowie eine Basis für den Kern von F an.

In den letzten drei Aufgaben schreiben Sie bitte möglichst klare Beweise.

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W. Seien ferner U_1 ein Unterraum von V und U_2 ein Unterraum von W. Existiert dann immer ein $\bar{F}$ zwischen den Quotienenräumen V/U_1 und W/U_2 so, dass das folgende Diagramm kommutiert?

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_{U_1}"'] & W \arrow[d, "\pi_{U_2}"] \\ V/U_1 \arrow[r, "\bar{F}"'] & W/U_2 \end{tikzcd}$$

Falls nein, können Sie ein Kriterium, d.h. eine Genau-dann-wenn-Bedingung, für die Existenz eines solchen $\bar{F}$ angeben?

Aufgabe 4. Diese Aufgabe braucht den Stoff von der ersten Vorlesungswoche 2022 **oder** man löst sie mit der Scherungsinvarianz.[1] Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die $(n \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ a & a & b & \cdots & b \\ a & a & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

Also $\alpha_{i,j} = a$ für $i \geq j$ und $\alpha_{i,j} = b$ sonst. Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von a und b. (Einige Fälle sind etwas knifflig und ein Tausch von a und b könnte helfen, oder man nimmt einfach die Scherungsinvarianz.)

Aufgabe 5. Es seien G, H, K Gruppen und $f : G \to H,\ g : H \to K$ Abbildungen. Die Abbildungen g und $g \circ f$ seien Gruppenhomomorphismen und g zusätzlich injektiv.
Ist nun auf f ein Gruppenhomomorphismus?

[1] Heike Mildenberger bittet um Entschuldigung, dass sie letzteres von 14 Tagen nicht sah.