BLATT 4

(09.11.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Die folgende Tabelle zeigt die Wahrheitswerte für die beiden Formeln φ und ψ.

A_0	A_1	A_2	φ	ψ
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Bestimmen Sie (ohne Beweis), was in der folgenden Tabelle auf die Formeln φ und ψ zutrifft.

	Ja	Nein
$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ ist erfüllbar		
$(\varphi \wedge \psi)$ ist erfüllbar		
$(\varphi \vee \psi)$ ist eine Tautologie		
$\{\varphi, \psi\}$ ist widersprüchlich		
Es gilt $\neg\psi \models \varphi$		
Es gilt nicht $\psi \models \varphi$		
$(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$ ist erfüllbar		
$(A_2 \to \varphi)$ ist eine Tautologie		

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Es sei $(G, *)$ eine endliche Gruppe mit Trägermenge $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$. Es ist relativ leicht zu sehen, dass es für jedes $i \leq n$ und jedes $k \leq n$ genau ein j gibt mit $g_i * g_j = g_k$ und genau ein j' gibt mit $g_{j'} * g_i = g_k$. In einer Verknüpfungstabelle bedeutet dies gerade, dass jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt. (Für g_k = neutrales Element ist sogar $j = j'$. Dies gehört nicht zur Aufgabe. Das Assoziativgesetz und das Gesetz von neutralen Element sind durch das diese beiden Regeln nicht notwendig auch schon formalisiert.)

Formalisieren Sie dieses „Sudoku-Kriterium“ und benutzen Sie dabei die Aussagenvariablen $A_{i,j,k}$ für $i, j, k \leq n$, welche jeweils für die Aussage $g_i * g_j = g_k$ stehen sollen.

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 16.11.2021, 10 Uhr.

Eine *Boole'sche Algebra* $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^c)$ ist eine Menge B mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und Operationen $\sqcap, \sqcup\colon B \times B \to B$ und ${}^c\colon B \to B$, für die folgenden Gleichungen gelten:

$$
\begin{array}{rclrcll}
a \sqcap a & = & a & a \sqcup a & = & a & \text{(1.1) Idempotenz} \\
a \sqcap b & = & b \sqcap a & a \sqcup b & = & b \sqcup a & \text{(1.2) Kommutativität} \\
(a \sqcap b) \sqcap c & = & a \sqcap (b \sqcap c) & (a \sqcup b) \sqcup c & = & a \sqcup (b \sqcup c) & \text{(1.3) Assoziativität} \\
a \sqcap (a \sqcup b) & = & a & a \sqcup (a \sqcap b) & = & a & \text{(1.4) Absorption} \\
a \sqcap (b \sqcup c) & = & (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) & a \sqcup (b \sqcap c) & = & (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) & \text{(1.5) Distributivität} \\
0 \sqcap a & = & 0 & 1 \sqcup a & = & 1 & \text{(1.6) Extrema} \\
a \sqcap a^c & = & 0 & a \sqcup a^c & = & 1 & \text{(1.7) Komplementierung}
\end{array}
$$

Zusätzlich definieren wir eine binäre Relation $\leq$ auf B durch:

$$a \leq b \iff a \sqcap b = a \quad \text{für } a, b \in B.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei B die Menge aller aussagenlogischen Formeln modulo Äquivalenz, d.h. wir betrachten äquivalente Formeln als gleich.

a) Wie können Sie $0, 1, \sqcap, \sqcup$ und ^{c} durch spezielle Formeln und durch Junktoren interpretieren, damit es sich um eine Boole'sche Algebra handelt?

b) Können Sie auch $\leq$ durch einen Junktor interpretieren?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Es sei $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^c)$ eine Boole'sche Algebra. Ein $b \in B \setminus \{0\}$ heißt *Atom*, wenn es kein $a \in B \setminus \{0, b\}$ mit $a \leq b$ gibt. Eine Boole'sche Algebra B heißt *atomlos*, wenn es kein Atom $b \in B$ gibt.

a) Gibt es endliche atomlose Boole'sche Algebren?

b) Gibt es eine abzählbar unendliche atomlose Boole'sche Algebra? Sie könnten zum Beispiel an die Grundmenge $\{q \;:\; q \text{ ist eine rationale Zahl und } 0 \leq q \leq 1\}$ und gewisse Intervalle denken.

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 16.11.2021, 10 Uhr.