Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 7

(30.11.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Entscheiden Sie (ohne Beweis), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	Wahr	Falsch
$n^4 = O(n^5)$		
$5n + 6n^2 + 200n^3 = O(n^3)$		
$3^n = o(n^3)$		
$n^2 = O(n \log(n))$		
$O(f) + O(g) = O(f + g)$		
$O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$		
Falls $f = O(g)$ und $g = O(h)$, dann auch $f = O(h)$		
Es ist $f \neq O(g)$ genau dann, wenn $g = o(f)$		

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Es seien $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$ und $c : V \to \{0, \ldots, m\}$ eine Färbung der Knoten in $m + 1$ Farben für zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$. (Die Gleichheit $c(v_i) = j$ besagt dabei, dass der Knoten v_i gerade die Farbe j besitzt.)
Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, die besagt, dass zwei im Graphen G benachbarte Knoten nie dieselbe Farbe haben. Definieren Sie dazu Aussagenvariablen die besagen, dass zwei Knoten benachbart sind bzw. dieselbe Farbe haben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Eine natürliche Zahl ist eine Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler besitzt. (Inbesondere ist 1 keine Primzahl). Für alle $n \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren einen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ durch

$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \ : \ m \text{ teilt } n\} \quad \text{und}$$
$$E_n = \{(k, m) \ : \ k \text{ teilt } m \text{ und } \frac{m}{k} \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

a) Zeichnen Sie G_{12} und G_{16}.

b) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für $n \in \mathbb{N}^+$ an, damit G_n die folgende Eigenschaft hat:
Für je zwei Knoten in G_n gibt es einen *eindeutigen* Pfad in G_n zwischen diesen Knoten.

c) Seien nun $m, n \in \mathbb{N}^+$ und m teile n. Ist dann G_m immer ein Teilgraph von G_n, d.h. ist immer $V_m \subseteq V_n$ und $E_m \subseteq E_n$?

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 7.12.2022, 10 Uhr.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Es seien zwei Zahlen k, ℓ in binärer Notation als Eingabe gegeben, so dass die Länge n der Eingabe (k, ℓ) von der Größenordnung $n = O(\log_2(k) + \log_2(\ell))$ ist. Gibt es eine Turingmaschine von in n polynomialer Zeitklasse, die $k + \ell$ berechnet? Skizzieren Sie so eine Maschine oder begründen Sie, warum es keine solche Maschine gibt.