BLATT 10
(21.12.2022)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

a) Geben Sie jeweils eine $\mathcal{L}(\emptyset)$-Aussage φ an, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ bzw. $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ für jede Symbolmenge τ und jede $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

b) Wir nehmen an, es gäbe eine Struktur $\mathfrak{B}$ mit leerem Universum. Haben ihre Formeln aus Teil a) immer noch dieselbe Eigenschaft bezüglich $\mathfrak{B}$? Finden Sie eine $\mathcal{L}(\emptyset)$-Aussage, die von leeren Strukturen erfüllt aber von „regulären" Strukturen nicht erfüllt werden?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{E\}$ mit einer zweistelligen Relation E. Formalisieren Sie die folgenden in Worten geschriebenen Aussagen als $\mathcal{L}(\tau)$-Aussagen.

a) Die Relation E ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ beliebig.

b) Es existiert mindestens eine Äquivalenzklasse von E mit mindestens n Elementen.

c) Es existiert mindestens eine Äquivalenzklasse von E mit genau n Elementen.

d) Es existiert genau eine Äquivalenzklasse von E mit genau n Elementen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{E\}$ mit einer zweistelligen Relation E. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ lässt sich auf natürliche Art als $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur mit Universum V auffassen, indem man E^G durch $\{(v, w) : \{v, w\} \in E\}$ interpretiert.
Beschreiben Sie in Worten, welche Graphen die folgenden $\mathcal{L}(\tau)$-Aussagen erfüllen, und zeichnen Sie jeweils einen erfüllenden und einen nicht erfüllenden Graphen.

a) $\forall x \exists y \exists z (\neg Exy \land Exz)$

b) $\exists x \exists y \exists z (\neg y = z \land Exy \land Exz \land \forall w (Exw \to (w = y \lor w = z)))$

Rückseite beachten!

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 11.1.2023, 10 Uhr.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{0, 1, +, \cdot, P, E\}$ mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionen + und $\cdot$ sowie einer einstelligen Relation P. Ferner sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \mathbb{P}, 2\mathbb{N})$ die $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur, in der 0, 1, + und $\cdot$ wie üblich interpretiert werden, P durch die Primzahlen $\mathbb{P}$ und E durch die geraden Zahlen $2\mathbb{N}$.
Formalisieren Sie die *Goldbach'sche Vermutung* als $\mathcal{L}(\tau)$-Aussage: Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.

Bonus (4 Punkte): Es sei $\tau' = \{+, \cdot\}$ und $\mathfrak{N}' = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die $\mathcal{L}(\tau')$-Struktur in der + und $\cdot$ wie üblich interpretiert werden. Können Sie die Goldbachsche Vermutung auch als $\mathcal{L}(\tau')$-Aussage formalisieren?

Abgabe per Ilias bis Mittwoch 11.1.2023, 10 Uhr.