

BLATT 12
(18.1.2023)

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Es sei τ eine beliebige Symbolmenge. Eine bijektive Abbildung $i : A \rightarrow B$ zwischen den Universen zweier $\mathcal{L}(\tau)$ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißt *Isomorphismus von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B}* , falls

- i) $i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$,
- ii) $i(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_1), \dots, i(a_n))$ für jedes n und alle n -stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und
- iii) $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ genau dann gilt, wenn auch $(i(a_1), \dots, i(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ für jedes n und alle n -stelligen Prädikate $R \in \tau$.

Zwei $\mathcal{L}(\tau)$ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} gibt. Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen.

- a) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R . Sind $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ isomorph?
- b) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R . Sind $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ und $(\mathbb{R}, <)$ isomorph?
- c) Sei $\tau = \{c, f\}$ für ein Konstantenzeichen c und ein zweistelliges Funktionssymbol f . Sind $(\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}, 1, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, 0, +)$ isomorph?
- d) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R . Welche Eigenschaften muss ein gerichteter Graph haben, damit er als $\mathcal{L}(\tau)$ -Struktur isomorph zu einem ungerichteten Graphen ist?
- e) Sei τ wieder beliebig, \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwei isomorphe Strukturen und φ eine $\mathcal{L}(\tau)$ -Formel. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Belegung s in \mathfrak{A} mit $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, wenn es eine Belegung s' in \mathfrak{B} mit $\mathfrak{B} \models \varphi[s']$ gibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Es seien φ, ψ, ϱ drei $\mathcal{L}(\tau)$ -Formeln für eine beliebige Symbolmenge τ . Zeigen oder widerlegen Sie im Hilbertkalkül:

- a) $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \varrho))$
- b) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$
- c) $\vdash (\varphi_t^x \rightarrow \exists x\varphi)$, wenn t für x in φ eingesetzt werden kann.
- d) $(\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$, wenn x nicht frei in φ auftritt.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Zeigen Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik:

Eine Formelmengende Γ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Vollständigkeitssatz.