

BLATT 2
(26.10.2022)

Aufgabe 1 (2 Punkte).

Eine Formel φ heißt *inkonsistent*, falls sie nicht erfüllbar ist. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder inkonsistent sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $((A \vee \neg B) \rightarrow \perp)$

c) $((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

b) $((A \wedge \neg A) \rightarrow B)$

d) $((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \wedge \neg(A \vee B)$

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

a) $\sigma \models \tau$

c) $(\sigma \wedge \neg \tau)$ ist nicht erfüllbar

b) $\models (\sigma \rightarrow \tau)$

d) $\sigma \equiv (\sigma \wedge \tau)$

Aufgabe 3 (2 Punkte).

Eine Junktorenmenge $\mathcal{J}$ heißt *vollständig*, wenn es zu jeder aussagenlogischen Formel σ eine (tautologisch) äquivalente aussagenlogische Formel τ gibt, die nur Junktoren aus $\mathcal{J}$ enthält.

Für den Junktor $\downarrow$ („weder noch“, in der Informatik auch „NOR“) gilt: $\bar{v}((\varphi \downarrow \psi)) = W$ gdw $\bar{v}(\varphi) = F$ und $\bar{v}(\psi) = F$ für alle Erweiterungen $\bar{v}$ von Wahrheitsbelegungen v .

Ist $\{\downarrow\}$ eine vollständige Junktorenmenge?

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten, die mit den Zahlen $0, \dots, n-1$ benannt sind. Vollständig bedeutet, dass jedes Paar von Knoten $i < j$ durch genau eine Kante $K_{i,j}$ verbunden ist. Für jede Kante $K_{i,j}$ sei eine Aussagenvariable $A_{i,j}$ gegeben¹. Die Kanten werden nun entweder blau oder rot gefärbt. Eine solche Färbung lässt sich als Belegung v der Aussagenvariablen $A_{i,j}$ (für alle $i < j$) mit Wahrheitswerten codieren.

a) Geben Sie für ein beliebiges n eine aussagenlogische Formel φ_n mit der folgenden Eigenschaft an:

Für jede Belegung v gilt (unter der obigen Korrespondenz, wobei $\bar{v}$ die eindeutige Erweiterung von v ist) $\bar{v}(\varphi_n) = W$ genau dann wenn in der Färbung von K_n ein monochromes Dreieck existiert, das heißt, es existieren drei Knoten, deren gemeinsame Kanten alle dieselbe Farbe haben.

¹Aussagenvariablen werden i.d.R. mit natürlichen Zahlen nummeriert. Für die bessere Notation wird in dieser Aufgabe die Notation zweckentfremdet. Für eine korrekte Notation, können Sie die Aussagenvariable $A_{i,j}$ als A_k für $k = n * i + j$ auffassen.

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 30.10.2025, 10 Uhr.

- b) Gibt es eine Belegung v derart, dass $\bar{v}(\varphi_5) = F$ gilt?

Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass φ_6 eine Tautologie ist. Mit anderen Worten existiert für jede Färbung der Kanten von K_6 ein rotes oder ein blaues Dreieck.

Aufgabe 5 (4 Punkte).

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Induktiv über die Länge der Zeichenkette: Keine aussagenlogische Formel in Polnischer Notation ist ein echtes Anfangsstück einer anderen Formel in Polnischer Notation.
Hinweis: Schwierig sind nur Anfangsstücke von $*\varphi_1\varphi_2$ für einen beliebigen zweistelligen Junktor $*$. Wenn ein solches selbst eine Formel wäre, welche Form hätte dann die Formel?
- b) Folgern Sie mit Hilfe von a), dass eine aussagenlogische Formel in Polnischer Notation eindeutig lesbar ist.

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 30.10.2025, 10 Uhr.