

BLATT 10
(17.12.2025)

Aufgabe 1 (4 Punkte).

- a) Geben Sie jeweils eine $\mathcal{L}(\emptyset)$ -Aussage φ an, so dass $\mathcal{A} \models \varphi$ bzw. $\mathcal{A} \not\models \varphi$ für jede Symbolmenge τ und jede $\mathcal{L}(\tau)$ -Struktur \mathcal{A} gilt.
- b) Wir nehmen an, es gäbe eine Struktur \mathcal{B} mit leerem Universum. Haben ihre Formeln aus Teil a) immer noch dieselbe Eigenschaft bezüglich \mathcal{B} ? Finden Sie eine $\mathcal{L}(\emptyset)$ -Aussage, die von leeren Strukturen erfüllt aber von „regulären“ Strukturen nicht erfüllt werden?

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Es sei $\tau = \{+, \cdot\}$ mit zwei zweistelligen Funktionen $+$ und \cdot . Wir betrachten die $\mathcal{L}(\tau)$ -Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, in der $+$ und \cdot wie üblich interpretiert werden, eine Belegung $s : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $s(v_0) = 5$, $s(v_1) = 4$ und $s(v_2) = 13$, sowie die folgenden drei $\mathcal{L}(\tau)$ -Formeln¹:

- $\varphi_1 : (v_0 \cdot v_0) + (v_1 \cdot v_1) = v_2 \cdot v_2$ (Pythagoräisches Tripel)
- $\varphi_2 : \exists x x \cdot x = v_1$ (Quadratzahl),
- $\varphi_3 : \forall x \forall y (x \cdot y = v_2 \rightarrow (x = v_2 \vee y = v_2))$ (Primzahl)

- a) Entscheiden Sie für $i = 1, 2, 3$, ob $\mathcal{N} \models \varphi_i[s]$ gilt.
- b) Gilt $\mathcal{N} \models \varphi_i[s \frac{v_1}{11}]$ für $i = 1, 2$? Bitte beachten Sie, dass $s(\frac{v_1}{11})$ eine andere Schreibweise für $s(v_1|11)$ ist.
- c) Geben Sie eine Belegung s' an, sodass $\mathcal{N} \models \varphi_i[s']$ gilt für $i = 1, 2, 3$.

Rückseite beachten!

¹nach der Definition von Termen müssten Terme der Form $v_1 + v_2$ eigentlich $+v_1v_2$ geschrieben werden, wir verwenden die übersichtlichere Form, in der wir wie gewohnt $+$ und \cdot zwischen zwei Terme schreiben und nicht davor und für die eindeutige Lesbarkeit Klammern setzen

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 08.01.2026, 10 Uhr.

Aufgabe 3 (4+2* Punkte). Sei $\tau' = \{f, R\}$ mit einem zweistelligen Funktionszeichen f und einer zweistelligen Relation R . Weiter seien die folgenden Terme gegeben:

- $t_0 = fxz$
- $t_1 = fuz$
- $t_2 = fuy$
- $t_3 = fxy$

- a) Entscheiden Sie für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, ob x frei für t_i in $\varphi = \exists y Rxy$ auftritt.
- b) Geben Sie für die Formel $\psi = \neg(\forall x \exists y Rfxyz \rightarrow \exists v \forall u Rufoxv)$ und für alle $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Formel $\psi_{t_i}^x$ an, falls diese definiert ist.
- c) *Bonus (2* Punkte)*: Nach Korollar 4.6. gilt, dass für jede $\mathcal{L}(\tau')$ -Struktur \mathcal{A} und jede Belegung s $(\mathcal{A}, s) \models \forall x \varphi$ schon $(\mathcal{A}, s) \models \varphi_{t_i}^x$ impliziert, falls x frei für t_i in φ ist. Sei χ_i die Formel, die man erhält, wenn man das x in φ durch den Term t_i ersetzt. Finden Sie für die i , für die x nicht frei für t_i in φ ist, eine $\mathcal{L}(\tau')$ -Struktur \mathcal{A} und eine Belegungen s_i , die zwar $\forall x \varphi x$, aber nicht χ_i erfüllen?

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Es sei $\tau'' = \{c_1, c_2, g, H\}$ mit zwei Konstanten c_1 und c_2 , einem einstelligem Funktionszeichen g und einem einstelligem Relationszeichen H .

- a) Sei $\Sigma = \{\forall x (gx = c_1 \rightarrow Hx), \forall y (Hy \rightarrow y = c_2)\}$. Gilt dann $\Sigma \models gc_2 = c_1$?
- b) Gilt $\Sigma \models \exists x (Hx \rightarrow \forall y Hy)$?

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 08.01.2026, 10 Uhr.