BLATT 11

(07.01.2026)

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Es sei τ eine beliebige Symbolmenge. Eine bijektive Abbildung $i : A \to B$ zwischen den Universen zweier $\mathcal{L}(\tau)$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißt *Isomorphismus von* $\mathcal{A}$ *nach* $\mathcal{B}$, falls

i) $i(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für alle Konstantensymbole $c \in \tau$,

ii) $i(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(i(a_1), \dots, i(a_n))$ für jedes n und alle n-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ und

iii) $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{A}}$ genau dann gilt, wenn auch $(i(a_1), \dots, i(a_n)) \in R^{\mathcal{B}}$ für jedes n und alle n-stelligen Prädikate $R \in \tau$.

Zwei $\mathcal{L}(\tau)$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt. Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen.

a) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R. Sind $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ isomorph?

b) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R. Sind $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ und $(\mathbb{R}, <)$ isomorph?

c) Sei $\tau = \{c, f\}$ für ein Konstantenzeichen c und ein zweistelliges Funktionssymbol f.
Sind $(\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}, 1, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, 0, +)$ isomorph?

d) Sei $\tau = \{R\}$ für ein zweistelliges Prädikat R. Welche Eigenschaften muss ein gerichteter Graph haben, damit er als $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur isomorph zu einem ungerichteten Graphen ist?

e) Sei τ wieder beliebig, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe Strukturen und φ eine $\mathcal{L}(\tau)$-Formel. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine Belegung s in $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[s]$, wenn es eine Belegung s' in $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[s']$ gibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Es seien φ, ψ, ϱ drei $\mathcal{L}(\tau)$-Formeln für eine beliebige Symbolmenge τ. Zeigen oder widerlegen Sie im Hilbertkalkül:

a) $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \varrho))$

b) $\neg(\varphi \to \psi) \vdash (\psi \to \varphi)$

c) $\vdash (\varphi^x_t \to \exists x \varphi)$, wenn t für x in φ eingesetzt werden kann.

d) $(\varphi \to \psi) \vdash (\exists x \varphi \to \psi)$, wenn x nicht frei in φ auftritt.

Rückseite beachten!

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.
Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 15.01.2026, 10 Uhr.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Eine Abbildung $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt (analog zu Definition 2.5) *berechenbar*, wenn es eine Turingmaschine, die auf jedem Input nach endlich vielen Schritten stoppt, gibt, die aus dem Input $(n_0, n_1, \dots, n_{k-1})$ den Output $f(n_0, \dots, n_{k-1})$ liefert.
Es sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ solch eine berechenbare Abbildung. Ist dann auch der Graph

$$\Gamma_f = \{(n_0, n_1, \dots, n_k) \ : \ f(n_0, \dots, n_{k-1}) = n_k\} \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$$

von f berechenbar? Das heißt, jetzt ist zu entscheiden, ob der Graph die Akzeptierungsmenge einer auf jede Eingabe nach endlicher Zeit stoppenden Turingmaschine ist. Gibt es umgekehrt eine nicht berechenbare Abbildung von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$, deren Graph berechenbar ist?

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.
Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 15.01.2026, 10 Uhr.