BLATT 4

(05.11.2025, mit blauer Korrektur vom 10.11.2025)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ak}, q_{ab})$ die folgende Turingmaschine (mit einem einzigen, nach links begrenzten Band):

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{ak}, q_{ab}\}$,
- $\Sigma = \{1, 2\}$,
- $\Gamma = \{1, 2, b\}$,
- $\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$, $\delta(q_0, 2) = (q_3, 2, R)$, $\delta(q_0, b) = (q_{ak}, b, L)$,
  $\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, R)$, $\delta(q_1, 2) = (q_{ab}, 1, L)$, $\delta(q_1, b) = (q_{ab}, 2, R)$,
  $\delta(q_2, 1) = (q_0, 1, R)$, $\delta(q_2, 2) = (q_{ab}, 2, R)$, $\delta(q_2, b) = (q_{ab}, 1, L)$,
  $\delta(q_3, 1) = (q_{ab}, b, L)$, $\delta(q_3, 2) = (q_4, 2, R)$, $\delta(q_3, b) = (q_{ab}, 2, L)$,
  $\delta(q_4, 1) = (q_{ab}, 1, R)$, $\delta(q_4, 2) = (q_0, 2, R)$, $\delta(q_4, b) = (q_{ab}, b, R)$.

a) Geben Sie ein Übergangsdiagramm für M an.

b) Bestimmen Sie $A(M)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $G = (V, E)$ ein höchstens abzählbarer Graph, wobei $V \neq \emptyset$ die Menge der Knoten (engl. vertex) von G und E die Menge der Kanten (engl. edge) von G ist. Wir betrachten hier ungerichtete Graphen ohne Schleifen, also $E \subseteq \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$.

G heißt k-färbbar, falls es eine eine Färbung von G mit k Farben, also eine Funktion $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ derart gibt, dass für je zwei benachbarte Knoten v_1, v_2 aus V (d.h. $\{v_1, v_2\} \in E$) gilt, dass $f(v_1) \neq f(v_2)$.

a) Formulieren Sie mit geeigneten Aussagenvariablen[1] eine Menge $\Sigma = \Sigma(V, E, k)$ von aussagenlogischen Formeln, die besagt, dass G k-färbbar ist.

b) Wenn V endlich und $k > 1$ ist, kann man zusätzlich noch eine aussagenlogische Formel angeben, die sagt, dass (V, E) nicht $(k-1)$-färbbar ist.

c) Sei nun $G' = (V', E')$ ein abzählbarer Graph so, dass jeder endliche Teilgraph $G'' = (V'', E'') \subseteq G'$ (d.h. sowohl $V'' \subseteq V'$ als auch $E'' \subseteq E'$ gilt) k-färbbar ist.

   Muss G' dann auch k-färbbar sein?

[1] Ähnlich zu Aufgabe 4 auf Blatt 2 dürfen Sie die Aussagenvariablen mit Indizes wie $A_{1,2}$ und/oder $A^{1,2}$ benennen.

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.
Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 13.11.2025, 10 Uhr.

Eine *Boole'sche Algebra* $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^c)$ ist eine Menge B mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und Operationen $\sqcap, \sqcup \colon B \times B \to B$ und ${}^c \colon B \to B$, für die die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{array}{rclrcll}
a \sqcap a &=& a & a \sqcup a &=& a & \text{(1.1) Idempotenz} \\
a \sqcap b &=& b \sqcap a & a \sqcup b &=& b \sqcup a & \text{(1.2) Kommutativität} \\
(a \sqcap b) \sqcap c &=& a \sqcap (b \sqcap c) & (a \sqcup b) \sqcup c &=& a \sqcup (b \sqcup c) & \text{(1.3) Assoziativität} \\
a \sqcap (a \sqcup b) &=& a & a \sqcup (a \sqcap b) &=& a & \text{(1.4) Absorption} \\
a \sqcap (b \sqcup c) &=& (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) & a \sqcup (b \sqcap c) &=& (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) & \text{(1.5) Distributivität} \\
0 \sqcap a &=& 0 & 1 \sqcup a &=& 1 & \text{(1.6) Extrema} \\
a \sqcap a^c &=& 0 & a \sqcup a^c &=& 1 & \text{(1.7) Komplementierung}
\end{array}$$

Zusätzlich definieren wir eine binäre Relation $\leq$ auf B durch:

$$a \leq b \iff a \sqcap b = a \quad \text{für } a, b \in B.$$

Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)**.**
Es sei $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, {}^c)$ eine Boole'sche Algebra. Ein $b \in B \setminus \{0\}$ heißt *Atom*, wenn es kein $a \in B \setminus \{0, b\}$ mit $a \leq b$ gibt. Eine Boole'sche Algebra B heißt *atomlos*, wenn es kein Atom $b \in B$ gibt.

a) Gibt es eine endliche atomlose Boole'sche Algebra?

b) Gibt es eine abzählbare atomlose Boole'sche Algebra? Sie könnten zum Beispiel an die Grundmenge $\{q \;:\; q \text{ ist eine rationale Zahl und } 0 \leq q \leq 1\}$ und gewisse Intervalle denken.

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.
Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 13.11.2025, 10 Uhr.